

Egy diszkrét dinamikus rendszer és a digitális sík forgatásai

Pethő Attila, Debreceni Egyetem

Legyen $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$. A $\tau_{\mathbf{r}} : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}^d$ diszkrét dinamikus rendszert, ahol $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$ esetén

$$\tau_{\mathbf{r}}(\mathbf{a}) = (a_1, \dots, a_{d-1}, -[\mathbf{r}\mathbf{a}])$$

S. Akiyama, Borbély Tibor, H. Brunotte, J. Thuswaldner és én 2005-ben definiáltuk és shift radix systemnek, SRS-nek, neveztük el. Megmutattuk, hogy az SRS a Rényi Alfréd által bevezetett β -előállítás és a Kátai Imre által bevezetett kanonikus számrendszerek közös általánosítása. Legyen $R(X) = X^d + r_{d-1}X^{d-1} + \dots + r_0$ és jelölje $\rho(R)$ az R gyökei abszolút értékének a maximumát. A $\{\tau_{\mathbf{r}}^k(\mathbf{a})\}_{k=0}^{\infty}$ pályák periódikusak, ha $\rho(R) < 1$, divergensek, ha $\rho(R) > 1$ és státuszuk bizonytalan, ha $\rho(R) = 1$.

Előadásunkban a $\rho(R) = 1$ esettel foglalkozó eredményeinket ismertetjük. Ha $d = 2$, akkor a digitális sík egy forgatásával van dolgunk. Megmutatjuk, hogy ha $r_0 = 1, |r_1| < 2$, akkor végtelen sok olyan $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z}^2$ létezik, amelyre a

$$0 \leq a_{n-1} + r_1 a_n + a_{n+1} < 1, n \geq 1, a_{n+1} \in \mathbb{Z},$$

nem lineáris rekurzióval definiált sorozat periódikus. Azt sejtjük, hogy ez minden kezdőértékpárra igaz. Ha $r_1 = 0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \pm\sqrt{3}$, akkor ezt be is tudjuk bizonyítani.

Példát mutatunk arra, hogy magasabb dimenzióban a $\{\tau_{\mathbf{r}}^k(\mathbf{a})\}_{k=0}^{\infty}$ pálya $\mathbf{a}$ -tól függően lehet periódikus és divergens is.