

# KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS: EGERVÁRY JENŐ NYOMÁBAN

Egerváry Jenő páros gráfok maximális súlyú teljes párosítására vonatkozó min-max tétele és algoritmikus megközelítési módja a kombinatorikus optimalizálás egyik legfontosabb kiinduló pontjává vált. Ebből fejlődött ki a Kuhn-féle Magyar módszer, innen ered a költséges hálózati folyam probléma, erre épül az általános gráfok párosításelmélete, valamint a matroidelmélet egyik legfontosabb algoritmusosa súlyozott matroidmetszet kiszámítására.

Tíz évvel ezelőtt ünnepeltük a Magyar Tudományos Akadémián a Magyar módszer 50. születésnapját. Az idei kerek évfordulón az MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport (EGRES) tagjai ízelítőt adnak az eltelt időszak eredményeiből. Külön hangsúlyt kap a szub- és szupermoduláris függvények valamint a paritás mélyreható szerepének bemutatása. A vizsgálatokban központi helyet foglalnak el a gráfok összefüggőségével és merevségével kapcsolatos különféle kérdések. Struktúrális eredmények kidolgozása éppoly fontos célt jelent, mint hatékony – pontos vagy közelítő – algoritmusok megkonstruálása. Kitérünk az elmélet és a valódi alkalmazások kapcsolatára is.

Jordán Tibor: *Kombinatorikus merevség és alkalmazásai*

Pap Gyula: *Párosítások, diszjunkt utak és matroidok*

Jüttner Alpár: *Gyakorlati kombinatorikus optimalizálás*

SZÜNET

Király Tamás: *Matroidok, poliéderek és gráfalgoritmusok*

Végh László: *Egzakt és közelítő algoritmusok összefüggőség-növelési problémákra*

Frank András: *Gráf-optimalizálási problémák közös gyökere: a szupermoduláris fedési tétel*

## Kombinatorikus merevség és alkalmazásai

Jordán Tibor

Különféle struktúrák merevségének vizsgálata egy izgalmas kutatási terület a geometria, az algebra és a kombinatorika metszéspontjában. Az előadásban a következő problémát vizsgáljuk. A  $d$ -dimenziós Euklideszi térben adott  $n$  pont és néhány kitüntetett pontpár ezen pontok közül, melyek távolságát rögzítettnek tekintjük. Van-e olyan  $d$ -dimenziós elrendezése a pontoknak, amely megőrzi a rögzített távolságokat, de az eredeti elrendezésükkel nem egybevágható? Ha nincs, akkor az  $n$  pont és a kitüntetett pontpárok együttesét globálisan merevnek mondjuk.

Ez a természetes fogalom, amely molekulák szerkezetének vizsgálataiban és lokalizációs problémákban is fontos szerephez jut, számos kombinatorikus és algoritmikus kérdést vet fel. El tudjuk-e dönteni, hogy egy adott elrendezés globálisan merev-e? Igaz-e, hogy kellően általános helyzetű pontok esetén a globális merevség csak a kitüntetett pontpárok gráfjától függ? (Igaz.) Milyen, algoritmikusan is tesztelhető kombinatorikus jellemzést adhatunk ezen globálisan merev gráfokra (adott  $d$ -re)? Az utóbbi években ebben a témakörben született eredményeket áttekintve látni fogjuk, hogy a gráf- és matroidelméleti eszközök (a geometriai és algebrai eredményekkel ötvözve) hogyan használhatók a felvetődő kombinatorikus kérdések egy részének megválaszolására.

## Párosítások, diszjunkt utak és matroidok

Pap Gyula

Mader diszjunkt  $A$ -utas tétele nemtriviális módon ötvözi Tutte párosításokra illetve Menger diszjunkt utakra vonatkozó tételeit. Az előadásban bemutatjuk a tétel kiterjesztését permutációkkal címkézett gráfokra, valamint az erre kidolgozott gráfelméleti jellegű algoritmust. Sikerült a pontkapacitásos általánosításra is hatékony algoritmust adni. Megoldjuk a feladat egy költséges változatát is, melyben egy út költségét a két végpontjának költsége határozza meg. Az derült ki, hogy egy fametrikából származó költségfüggvény esetén létezik polinomiális algoritmus, ellenkező esetben pedig NP-nehéz a feladat.

Az előadás második felében a matroid parity feladatban elért legfrissebb eredményeket tekintjük át. Kiderült például, hogy a lineáris matroid parity feladat megoldható polinomiális időben, még akkor is, ha a lineáris reprezentáció nem áll rendelkezésre. Ezzel megoldható a paritásfeltételes erősen összefüggő irányítások kérdése. A lineáris matroid parity feladat súlyozott változatáról is megmutatjuk, hogy polinomidőben megoldható.

## Kombinatorikus optimalizálás a gyakorlatban

Jüttner Alpár

Az előadásban a kombinatorikus optimalizálás olyan valós alkalmazásaiból válogatunk, amelyek közvetlenül vagy közvetve kapcsolódnak az Egerváry kutatócsoport alapkutatásaihoz. Az első részében a távközléssel és a közszolgáltatások optimalizálásával kapcsolatos olyan eredményeket mutatunk be, amelyekben a kutatócsoport tagjai is aktívan részt vett. Ezután röviden ismertetjük a kutatócsoport koordinálásával fejlesztett nyílt forráskódú LEMON gráf- és hálózati optimalizációs programcsomagot. Ezt a szoftvert mára - teljesítményének, megbízhatóságának és szabad felhasználhatóságának eredményeképpen - széles körben használják mind ipari megoldásokban mind kutatási feladatokhoz. Az előadás végén ezekre mutatunk néhány példát.

## Matroidok, poliéderek és gráf-algoritmusok

Király Tamás

Az előadásban két olyan témakörrel foglalkozunk, amelyben gráf-optimalizálási feladatokat matroidelméleti és poliéderek módszerekkel tudunk megoldani. A súlyozott fokszámkorlátos feszítő fa feladatban adott egy élköltséges gráf alsó és felső fokszám korlátokkal, és minimális költségű olyan feszítő fát keresünk, ami teljesíti a fokszám-korlátokat. Bár a feladat NP-teljes, Mohit Singh és Lap Chi Lau megmutatták, hogy polinom időben található az LP relaxáció optimumánál nem drágább feszítő fa, ami legfeljebb 1-gyel sért minden fokkorlátot. Az eredmény mögött egy általánosabb, tetszőleges matroidra működő algoritmus van, amit Singh-gel és Lau-val közösen vizsgáltunk.

A második téma élköltséges gráfban a minimális költségű fák és fenyők legkisebb lefogó élhalmazának a megkeresése. Megmutatjuk, hogy fákra ez könnyen megtehető standard matroid algoritmusok és minimális vágás keresés segítségével, fenyők esetén azonban kifinomultabb eszközökre van szükség a megoldáshoz (Bernáth Attila és Pap Gyula eredménye). Ennek általánosításaként Bernáth Attilával azt vizsgáljuk, hogy az eredmények kiterjeszthetők-e  $k$ -fenyőkre, azaz  $k$  feszítő fenyő éldiszjunkt uniójára. Friss eredmény, hogy konstans  $k$  esetén van polinomiális algoritmus a minimális költségű  $k$ -fenyők legkisebb lefogásának megtalálására.

## Egzakt és közelítő algoritmusok összefüggőség-növelési problémákra

Végh László

Az összefüggőség-növelési problémában egy adott irányított vagy irányítatlan gráfhoz szeretnénk új éleket hozzáadni úgy, hogy bizonyos összefüggőségi feltétel teljesüljön, például  $k$ -szorosán él- vagy pontösszefüggővé váljon. A minimális költségű új élhalmaz megtalálása a legtöbb változatban NP-teljes. Ha azonban minimális számú új élet szeretnénk hozzávenni, számos érdekes eset polinomiálisan megoldható.

Az előadásban áttekintést adunk a polinomiálisan megoldható esetekről és a minimális költségű variánsokra ismert közelítő algoritmusokról, valamint az ezekben használt fontosabb módszerekről. Részletesebben bemutatunk az irányítatlan pontösszefüggőség növelésére egy konstans approximációs algoritmust. Ez a Joseph Cheriyanal közös eredmény jól illusztrálja, hogy a minimális élszámú problémák kapcsán felmerülő ötletek hogyan vezethetnek új approximációs eredményekhez.

### Gráf-optimalizálási problémák közös gyökere: a szupermoduláris fedési tétel

Frank András

Legolcsóbb utak, teljes párosítások, maximális folyamatok a kombinatorikus optimalizálás közismert kiindulási pontjai. A hálózati folyamatokat és a matroidokat egyesítő általános eszközként a szubmoduláris áramok szolgálnak. Ezek rövid áttekintését követően felidézünk egy korábbi általános eredményünket szupermoduláris függvények digráffal történő optimális fedéséről, amelynek háttérében immár nem a poliédeses megközelítés áll. A szubmoduláris áramokhoz képest lényegi eltérés, hogy a szupermoduláris fedési tétel segítségével olyan optimalizálási feladatok is megoldhatók, melyek költséges változata már NP-teljes.

Az előadásban röviden emlékeztetünk néhány korábbi alkalmazásra, majd e modell három frissen kapott következménye kerül bemutatásra: (A) Edmonds élidegen fenyvesekről szóló tételének kiterjesztéseként jellemzés előírt élszámú fenyvesek pakolására irányított gráfban, (B) a korábbról ismert, irányítatlan gráfra vonatkozó tétel ellenpárjaként adott befok és kifok előírásokat teljesítő egyszerű  $k$ -összefüggő irányított gráf létezésének jellemzése, (C) Ryser maximális tag-rang (term-rank) tételének kétirányú kiterjesztéseként egyrészt a maximális párosítást tartalmazó fokszám korlátos egyszerű páros gráfok létezésének jellemzése, másrészt a maximális tag-rang tétel matroidos általánosítása. Az új eredmények részben Bérczi Kristóffal közösek.