Emlékezés Révész Pálra

Révész Pál valószínűségszámítással foglalkozott. Elméleti kutatások mellett sokat tett a valószínűségszámítás népszerűsítése érdekében is. Érdeklődési területét jól mutatja négy könyve is. Ezek rövid ismertetésén keresztül igyekszem bemutatni érdeklődését, munkásságát. (Így szükségszerűen kihagyom néhány későbbi vizsgálatát, eredményét, amelyeket már nem tudott könyvalakban feldolgozni.)

Révész Pál könyvei 1.) The laws of large numbers

2.) Strong approximations in probability and statistics
(Csörgő Miklóssal közösen írt könyv)
3.) Random walk in random and non-random environments
4.) Random walks of infinitely many particles

Az egyes könyvek ismertetése:

1.) **The laws of large numbers**

Azt lehet mondani, hogy ez az 1967-ben írt könyv tartalmazza mindazokat az akkor ismert eredményeket erről a témáról, amelyeket érdemes tudni. A szerző először független valószínűségi változók részletösszegeinek a viselkedéséről ír, majd olyan valószínűségi változók összegeit vizsgálja, amelyek ugyan nem függetlenek, de rendelkeznek a függetlenség valamilyen gyengített változatának a tulajdonságával.

A könyv első témája a független valószínűségi változók vizsgálata, a nagy számok törvénye és néhány ezekhez természetes módon kapcsolódó probléma. A nagy számok törvénye a következőt jelenti. Tekintsük független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $X_1, X_2, \dots$ sorozatát és ezek

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

részletösszegeit. Azt mondjuk, hogy ezek teljesítik a nagy számok törvényét, ha létezik olyan a szám, amelyre az $\frac{S_n}{n} - a$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat konvergál nullához. Természetesen ezen tulajdonság megfogalmazásakor tisztázni kell, hogy milyen konvergencia fogalmat használunk. A leggyakrabban használt konvergencia fogalmak a sztochasztikus és az 1 valószínűségi konvergencia. Ha $\frac{S_n}{n} - a$ sztochasztikusan konvergál nullához akkor a nagy számok gyenge, ha 1 valószínűséggel konvergál oda, akkor a nagy számok erős törvényéről beszélünk. Ismert mind a nagy számok gyenge mind a nagy számok erős törvényének a szükséges és elégséges feltétele, illetve az azokban szereplő a konstans értéke.

Vizsgálja a könyv a konvergencia sebességét a nagy számok gyenge törvényében, és ismerteti az iterált logaritmus tételt, ami a nagy számok erős törvényének az élesítése. Ezzel a tétellel, illetve ennek általánosításával Révész Pál későbbi könyveiben részletesebben foglalkozik, így erről azok ismertetésében fogok írni. Szó van még a könyvben a nagy számok törvényében vizsgált problémák természetes általánosításairól, így annak vizsgálatáról, hogy mit mondhatunk független, egyforma eloszlású valószínűségi változók súlyozott átlagairól vagy független, de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók átlagainak a viselkedéséről. E vizsgálatokban fontos szerepet játszik Kolmogorov három sor tétele, amely megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy végtelen sok független valószínűségi változó összege 1 valószínűséggel konvergáljon.

A könyv következő témája az ortogonális polinomok viselkedése. Itt a legfontosabb eredmény a Rademacher–Mensov tétel arról, hogy ortogonális valószínűségi változók (végtelen) lineáris kombinációi mikor konvergálnak, és Tandori Károly ellenpéldája, amely megmutatja, hogy e tétel feltételei nem gyengíthetők. Megfogalmazom ezeket az eredményeket.

Tétel. *(Rademacher–Mensov) Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ ortonormált polinomok sorozata, azaz legyen $E\xi_i\xi_j = 0$, ha $i \neq j$ és $E\xi_i^2 = 1$. Legyen $c_1, c_2, \dots,$ valós számok olyan sorozata, amelyre $\sum_{k=1}^\infty c_k^2 \log^2 k < \infty$. Ekkor a $\sum_{k=1}^\infty c_k\xi_k$ összeg 1 valószínűséggel konvergál.*

Tandori ellenpéldája. *Legyen adva $c_1, c_2, \dots,$ valós számok olyan sorozata, amelyre $\sum_{k=1}^\infty c_k^2 \log^2 k = \infty$. Ekkor létezik ortonormált polinomok olyan $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozata, amelyre a $\sum_{k=1}^\infty c_k\xi_k$ összeg 1 valószínűséggel divergál.*

Érdemes megjegyezni, hogy a Rademacher–Mensov tétel "lelke" a következő maximum egyenlőtlenség.

Tétel. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ortonormált polinomok és $c_1, \dots, c_n$ valós számok. Ekkor*

$$E\left[\left|\max_{1\le k\le n}\sum_{j=1}^k c_j\xi_j\right|^2\right] \le (\log^2 4n)\sum_{j=1}^n c_j^2.$$

A könyv foglalkozik olyan modellek viselkedésével is, amelyek több multiplikativ tulajdonsággal rendelkeznek. (Ez azt jelenti, hogy több olyan eset van, amikor a tekintett valószínűségi változók szorzatának a várható értéke egyenlő az egyes tagok várható értékének a szorzatával.) A legérdekesebb példa az úgynevezett equinormed strongly multiplicative systems (ESMS) esete. Azt mondjuk, hogy a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók ESMS rendszert alkotnak, ha $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 = 1$ minden j indexre, és

$$E\xi_{j_1}^{\varepsilon_{j_1}} \cdots \xi_{j_k}^{\varepsilon_{j_k}} = E\xi_{j_1}^{\varepsilon_{j_1}} \cdots E\xi_{j_k}^{\varepsilon_{j_k}}$$

minden $j_1, \dots, j_k$ index sorozatra, ahol $\varepsilon_{j_s} = 1$ vagy $\varepsilon_{j_s} = 2$ minden $1 \le s \le k$ indexre.

Világos, hogy független, nulla várható értékű és 1 szórású valószínűségi változók sorozata ESMS rendszert alkot. Másrészt, ESMS rendszert alkotó korlátos valószínűségi változók sorozata a legtöbb független valószínűségi változókra érvényes 1 valószínűségű konvergenciáról szóló tételt teljesíti.

A könyv egyik fejezete valószínűségi változók részsorozatainak a viselkedésével foglalkozik. E fejezet legérdekesebb problémája Steinhaus egy sejtéséhez kapcsolódik. Steinhaus azt kérdezte, hogy meg lehet-e adni valószínűségi változók olyan $\mathcal{F}$ családját, amelyre

1. $|f(t)| = 1$ minden $f \in \mathcal{F}$-re
2. Minden $f_n \in \mathcal{F}$ sorozatra $\frac{1}{n} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ divergens majdnem minden t-re.

Több olyan eredmény született, amelyekből nemleges válasz adódik Steinhaus kérdésére. Ezek közül a legérdekesebb és legfontosabb Komlós János alábbi eredménye, amelynek később több alkalmazása is lett. Egyébként ez az eredmény Révész Pál egy kérdésére adott válaszként keletkezett.

Tétel. *(Komlós János) Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók olyan sorozata, amelyre $E|\xi_n| \le K$ minden n indexre valamilyen K számmal. Ekkor létezik az indexeknek olyan $n_1 < n_2 < \cdots$ részsorozata, amelyre*

$$P\left(\frac{\xi_{n_1} + \xi_{n_2} + \cdots + \xi_{n_k}}{k} \to \eta\right) = 1$$

valamilyen η valószínűségi változóval.

A könyvben tárgyalt többi problémát csak röviden ismertetem. A könyv röviden tárgyalja a nagy számok törvényéhez kapcsolódó eredményeket stacionárius sorozatok esetén. Ezek az eredmények az ergod tételen alapulnak. Ugyancsak foglalkozik speciális függvények részsorozatainak a vizsgálatával.

Elsősorban trigonometrikus és Walsh függvények exponenciálisan ritka részsorozatairól van szó. Itt ki lehet használni e függvénysorok viselkedéséről szóló eredményeket. Témája a könyvnek néhány eredmény gyengén függő valószínűségi változók összegeinek a viselkedéséről. Itt a gyenge függés néhány klasszikus definicióját tekintjük. Ugyancsak témája a könyvnek a Markov láncok viselkedésével kapcsolatos 1 valószínűségű konvergenciáról szóló tételek vizsgálata. Ezek a Markov folyamatok a könyvben is ismertetett klasszikus eredményein alapulnak. Röviden említve van a nagy számok törvénye Banach tér értékű független, egyforma eloszlású valószínűségi változók esetében is. Végül a könyv tárgyalja véletlen tagszámú független valószínűségi változó átlagának a viselkedését.

2. **Strong approximations in probability and statistics**

Először vázolom kissé informálisan azt a problémakört, amely e könyv vizsgálatának a középpontjában áll.

Legyen adva valószínűségi változók valamilyen érdekes tulajdonsággal rendelkező $U_1, U_2, \dots$ sorozata. Az első kérdés:

a) Mondhatjuk-e, hogy az U_n, $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók eloszlásai nagy n indexre közelítőleg egyenlők?

Ha az a) pontban megfogalmazott kérdésre igenlő a válasz, akkor a következő kérdés ez:

b) Mondhatjuk-e, hogy az $(U_1, \dots U_n)$ vektor eloszlásai minden nagy n indexre hasonlóak? Természetesen ezt a kérdést pontosabban meg kell fogalmazni.

Ha erre a kérdésre is igenlő a válasz, akkor érdemes megvizsgálni, hogy ez az eredmény, vagy ennek alkalmas élesítése segít-e az $U_1, U_2, \dots$ végtelen sorozat 1 valószínűséggel teljesülő tulajdonságainak a vizsgálataiban.

A leggyakrabban vizsgált eset a következő. Legyen $X_1, X_2, \dots$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyekre $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$. Vegyük ezek $S_0 = 0$, és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeit, és legyen $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \dots$. Ezzel a választással az a) pontbeli kérdésre igenlő a válasz a centrális határeloszlás tétel alapján. A b) pontbeli kérdést így lehet pontosan megfogalmazni:

Definiáljuk minden n számra a következő $S_n(t)$, $0 \le t \le 1$, véletlen töröttvonal függvényt a $[0,1]$ intervallumon.

$$S_n(0) = 0, \quad S_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{S_k}{\sqrt{n}}, \qquad k = 1, \dots, n,$$
$$S_n(t) \text{ lineáris függvény a } \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \text{ intervallumon.}$$

Az $S_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, véletlen töröttvonal függvények tekinthetők úgy, mint $C([0,1]))$ térbeli valószínűségi változók, és igaz rájuk az úgynevezett funkcionális centrális határeloszlás tétel, amely szerint ezek eloszlásai gyengén konvergálnak a $[0,1]$ intervallumban definiált Wiener folyamat eloszlásához a $C([0,1])$ térben. (A $C([0,1])$ tér a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények Banach tere a szuprémum normával.)

(Emlékeztető:) A Wiener folyamat definiciója. *Egy $W(t)$, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamat Wiener folyamat a $[0,T]$ intervallumban, $0 < T < \infty$, ha annak véges dimenziós eloszlásai normális eloszlások $EW(t) = 0$ várható értékkel és $EW(s)W(t) = \min(s,t)$ kovarianciafüggvénnyel (ez meghatározza a Wiener folyamat eloszlását), és a trajektóriái folytonosak. A Wiener folyamat definicióját természetes módon ki lehet terjeszteni arra az esetre is, amikor a t paraméter minden nem negatív értéket felvehet. A Wiener folyamat továbbra is Gauss folyamat folytonos trajektóriákkal, és ugyanaz a képlet adja meg a várható értékét és a kovarianciafüggvényét.*

Hasznos tudni nemcsak az előbb említett funkcionális centrális határeloszlás tényét, hanem az ott tekintett konvergencia sebességét is. Ezt többféleképp megfogalmazhatjuk. Különösen hasznosnak bizonyult az alábbi megfogalmazás, illetve az abban megfogalmazott kérdésre adott jó válasz. Azt szeretnénk tudni, hogy alkalmas konstrukció esetén milyen közel helyezhető egymáshoz az előbb definiált $S_n(t)$ folyamat és egy alkalmasan konstruált $W(t)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat. Milyen viszonylag kis A_n B_n számokkal lehet teljesíteni az

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1} |S_n(t) - W(t)| > A_n\right) \le B_n$$

egyenlőtlenséget?

Ugyancsak érdekes az ezzel a kérdéssel szoros kapcsolatban levő alábbi probléma. A $Wt)$, $0 \le t < \infty$, Wiener folyamat alkalmas konstrukciója esetén milyen A_n számokkal lehet biztosítani az alábbi relációt?

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - W(n)|}{A_n} \le 1 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Ez utóbbi reláció hasznos lehet, ha azt vizsgáljuk, hogy az S_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat milyen 1 valószínűséggel érvényes tulajdonságokkal rendelkezik.

A most tárgyalt könyv ezeket a kérdéseket részletesen tárgyalja, és megmutatja, hogy az ezen kérdésekre adott válaszoknak milyen érdekes következményei vannak. Ugyancsak tárgyalja a következő, hasonló problémát.

Tekintsük független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók $X_1, \dots, X_n$ sorozatát, és készítsük el azok

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\text{azon } 1 \le j \le n \text{ indexek száma, amelyekre } X_j \le x, \quad 0 \le x \le 1,$$

empirikus eloszlásfüggvényét, illetve annak $\sqrt{n}(F_n(x) - x)$, $0 \le x \le 1$, normalizáltját. Erre is érvényes egyfajta funkcionális határeloszlás tétel, csak itt a Wiener folyamat szerepét a $B(t)$, $0 \le t \le 1$, úgynevezett Brown bridge veszi át, amit például úgy definiálhatunk, hogy $B(t) = W(t) - tW(1)$, ahol $W(t)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat. Az előbb megfogalmazott független valószínűségi változók részletösszegeiről szóló problémák természetes megfelelői megfogalmazhatóak ebben az esetben is, és azokra is sikerült jó választ adni.

A könyv ezeket az empirikus eloszlásfüggvénnyel kapcsolatos problémákat, a velük kapcsolatos eredményeket és azok következményeit is tárgyalja. A következmények között sok a matematikai statisztikában hasznos eredmény van.

A könyv első fejezete a Wiener folyamat és a Brown bridge tulajdonságaival foglalkozik. Jó becslést ad egy a $[0, T]$ intervallumban definiált Wiener folyamat ingadozásának a maximumára, ha ezt a maximumot a $[0, T]$ intervallum összes legfeljebb h hosszúságú részintervallumán vesszük valamilyen rögzített $0 < h < T$ számmal, azaz a $\sup\limits_{0\le s\le T-h}\ \sup\limits_{0\le t\le h} |W(t+s) - W(s)|$ kifejezésre. Ezen eredmény segítségével belátja Strassen iterált logaritmus tételét Wiener folyamatokra. Később, az előbb említett problémákra adott eredmények segítségével könnyen megkapjuk ezen eredmény megfelelőjét független egyforma eloszlású valószínűségi változók részletösszegeire is.

Az eredeti iterált logaritmus tétel azt mondja, hogy egy a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált Wiener folyamatra

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{W(n)}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad 1 \text{ valószínűséggel, ahol } n = 1,2,\dots.$$

Megjegyzem, hogy $W(n)$, $n = 1,2,\dots$, független, standard normális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek a sorozata.

Az is igaz, hogy a most tekintett, n paramétertől függő törtek sorozata egy relatív kompakt halmaz, és e sorozat torlódási pontjainak a halmaza a $[-1,1]$ intervallum.

Strassen észrevette, hogy nem csak a $W(t)$, $0 \le t < \infty$, Wiener folyamat $W(n)$, $n = 1,2,\dots$, pontjainak együttes viselkedésére lehet jellemzést adni, hanem hasonló, általánosabb jellemzés érvényes akkor is, ha minden $n = 1,2,\dots$ indexre a teljes $W(t)$, $0 \le t \le n$, folyamatot tekintjük. Nevezetesen, vegyük a $[0,1]$ intervallumon definiált $\eta_n(x) = \frac{W(xn)}{\sqrt{2n\log\log n}}$, $0 \le x \le 1$, az n paramétertől függő sztochasztikus folyamatot minden $n = 1,2,\dots$-re. Ezt tekinthetjük $C([0,1])$ térbeli valószínűségi változónak is. Majdnem minden ω elemi eseményre az $\eta_1(\cdot), \eta_2(\cdot), \dots$ valószínűségi változók sorozata relatív kompakt halmazt alkot a $C([0,1])$ térben, és pontosan jellemezni tudjuk e sorozatok torlódási pontjainak a halmazát, ami majdnem minden ω elemi eseményre ugyanaz. Ez a $C([0,1])$ tér következő $\mathcal{S}$ kompakt részhalmaza.

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \;=\; \Big\{ f\colon\; & f(0)=0,\; f(x) \text{ abszolút folytonos függvény} \\ & \text{a } [0,1] \text{ intervallumon, és } \int_0^1 (f'(x))^2\,dx \le 1 \Big\}.\end{aligned}$$

Az előbb jelzett probléma, amelynek segítségével megkaptuk Strassen iterált logaritmus tételét úgy interpretálható, hogy milyen nagyok a Wiener folyamat növekményei. Vizsgál a könyv egy másik problémát is, amely úgy interpretálható, hogy milyen kicsik a Wiener folyamat ingadozásai.

E probléma megfogalmazásában rögzítsünk egy $0 < a_T \le T$ számot, minden $T > 0$ számra, és definiáljuk minden $0 \le t \le T - a_T$ számra az $\mathcal{F}(t) = \sup\limits_{0<s\le a_T} |W(t+s) - W(t)|$ mennyiséget. Legyen $I(T) = \inf\limits_{0\le t\le T-a_T} \mathcal{F}(t)$. A könyv vizsgálja, hogy milyen γ_T normálófaktor mellett teljesül a $\liminf\limits_{T\to\infty} \gamma_T I(T) = 1$ reláció 1 valószínűséggel.

A kapott eredményből következik az alábbi Chung iterált logaritmus tételének nevezett figyelemreméltó, de nem eléggé ismert eredmény.

$$\liminf_{T\to\infty}\left(\frac{8\log\log T}{\pi^2 T}\right)^{1/2}\sup_{0\le t\le T}|W(t)|=1 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

A könyv első fejezete tárgyalja ezenkívül a Brown bridge-nek a Wiener folyamathoz hasonló tulajdonságait, ismertet néhány olyan határeloszlás tételt a Wiener folyamat és a Brown bridge bizonyos funkcionáljaira, amelyek fontos szerepet játszanak a matematikai statisztikában. Ismertet egy érdekes határeloszlás tételt az $U(t)$, $-\infty < t < \infty$, Ornstein-Uhlenbeck folyamat $\sup\limits_{0\le t\le T} U(t)$ maximumának az eloszlására, ha $T\to\infty$. Az Ornstein-Uhlenbeck folyamat nagyon fontos a valószínűségszámításban. Az $U(t)=\frac{W(e^{\alpha t})}{e^{\alpha t/2}}$, $-\infty < t < \infty$, képlet adja meg az Ornstein-Uhlenbeck folyamatok egyik lehetséges konstrukcióját. Ezért a Wiener folyamatok vizsgálata segíthet az említett kifejezés aszimptotikus viselkedésének a vizsgálatában.

A könyv első fejezete foglalkozik még a kétdimenziós Wiener folyamatok vizsgálatával is, de ez nem kapcsolódik a könyv további részeihez.

A könyv második fejezete független valószínűségi változók részletösszegeinek Wiener folyamatokkal való approximációjával foglalkozik. Itt tárgyalják az e könyv ismertetésének bevezetésében tárgyalt problémákat.

Ismertetik Strassen azon eredményét, amely szerint ha adva van egy $W(t)$, $t\ge 0$, Wiener folyamat és független egyforma eloszlású nulla várható értékű és 1 szórású valószínűségi változók $S_1, S_2, \dots$ részletösszegei, akkor meg lehet adni az $S_1, S_2, \dots$ sorozat eloszlásával megegyező eloszlású $\hat S_1, \hat S_2, \dots$ sorozatot úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\hat S_n - W(n)|}{\sqrt{n\log\log n}}=0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Innen következik, hogy a Wiener folyamatokra megfogalmazott Strassen-féle iterált logaritmus tétel érvényben marad, ha abban a $W(n)$ valószínűségi változókat az S_n valószínűségi változókkal helyettesítjük.

Strassen ezt az eredményt az úgynevezett Szkorohod-féle beágyazás segítségével bizonyította. Ennek az állításnak a bizonyításában nem tett fel többet azon független, egyforma eloszlású valószínűségi változók viselkedéséről, amelyek részletösszegeit vizsgálta, mint azt, hogy azoknak létezik második momentumuk. Ha több momentumuk létezik, akkor a Szkorohod-féle beágyazás jobb approximációt biztosít. Például, ha létezik ezen valószínűségi változóknak negyedik momentuma, akkor létezik olyan konstrukció, amelyre

$$|S_n - W(n)| = O\left((n \log\log n)^{1/4} (\log n)^{1/2}\right) \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Hiába van e valószínűségi változóknak több momentuma, vagy bármilyen extra tulajdonsága, ha a tekintett valószínűségi változók nem normális eloszlásúak, akkor a Szkorohod-féle beágyazás nem ad ennél jobb eredményt.

Felmerült a kérdés, hogy lehet-e egyáltalán jobb approximációt adni. Ezzel a problémával kapcsolatos a Rényi Alfréd által felvetett úgynevezett gejzír probléma. E probléma eredeti kérdése az, hogy ha egy gejzír rendszeresen kitör, és a kitörések közötti véletlen idő intervallumok független és egyforma eloszlású valószínűségi változók, akkor meg tudjuk-e becsülni jól ezen időintervallumok eloszlását, ha sokáig figyeljük a gejzírt, de nincs óránk, és csak azt tudjuk megállapítani, hogy az egyes kitörések hanyadik napon történtek.

Valójában a következő általánosabb probléma érdekel minket. Legyen $S_1, S_2, \dots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek a sorozata. Tegyük fel, hogy ezeket a részletösszegeket csak valamilyen hibával tudjuk megmérni, azaz csak az $S_1+\varepsilon_1, S_2+\varepsilon_2, \dots$ valószínűségi változókat tudjuk megfigyelni, ahol az ε_n, $n = 1, 2, \dots$, hibákról semmit nem tudunk azon kívül, hogy nem túl nagyok, $\varepsilon_n = o(f(n))$ 1 valószínűséggel valamilyen ismert $f(n)$ függvénnyel. Meg tudjuk-e állapítani, hogy milyen eloszlású valószínűségi változók részletösszegeit figyeltük meg bizonyos hibával?

Bártfai Pál megmutatta, hogy amennyiben a keresett $F(x)$ eloszlásnak létezik $R(t) = \int e^{tx} dF(x)$ momentumgeneráló függvénye valamilyen $t > 0$ számmal, és $\varepsilon_n = o(\log n)$ 1 valószínűséggel, akkor a keresett eloszlásfüggvény meghatározható a hibával terhelt végtelen sor megfigyelése segítségével. Ebből az eredményből következik, hogy az $S_n - W(n) = o(\log n)$ 1 valószínűséggel tulajdonságot teljesítő konstrukció nem lehetséges.

Azt, hogy a Szkorohod-féle beágyazás segítségével kapott approximációnál lehet jobbat adni Révész Pál és Csörgő Miklós bizonyította be. Egy nagyon természetes konstrukciót tekintettek, amelynek jósága attól függ, hogy a tekintett $X_1, \dots, X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ normalizált részletösszegének $F_n(x)$ eloszlásfüggvénye milyen jól közelíthető a standard normális valószínűségi változó $\Phi(x)$ eloszlásfüggvényével, azaz a $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|$ kifejezés mekkora. Ennek nagysága nagyon enyhe feltételek mellett $O(n^{-1/2})$, és ebben az esetben a Révész és Csörgő által alkalmazott konstrukció ugyanolyan jó becslést ad, mint a Szkorohod-féle beágyazás.

Bizonyos esetekben az $F_n(x) - \Phi(x)$ kifejezés lényegesen kisebb, mint $O(n^{-1/2})$, és ilyenkor a Révész és Csörgő által alkalmazott módszer jobb approximációt ad. Nagyon általános feltételek mellett ugyanis létezik az $F_n(x)$ eloszlásfüggvénynek pontosabb approximációja, az úgynevezett Edgeworth sorfejtés, amely szerint $F_n(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(x) + \frac{1}{n}Q_2(x) + \cdots$ ismert $Q_1(x)$ és $Q_2(x)$ függvényekkel. Ha $EX_1^3 = 0$, azaz X_1 harmadik momentuma megegyezik a standard normális eloszlás harmadik momentumával, akkor az $\frac{1}{\sqrt{n}}$ együtthatós tag eltűnik az Edgeworth sorfejtésből, és a $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1})$ becslés érvényes. Ilyenkor, mint Révész és Csörgő megmutatták,

$$|S_n - W(n)| = O\left(n^{1/6}(\log n)^{13/2}\right) \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

nagyságú approximáció lehetséges. Ha az Edgeworth sorfejtésben további tagok is eltűnnek, akkor még jobb becslés adható.

Később, Komlós János, Major Péter és Tusnády Gábor még jobb approximációt adtak. Egy új, finomabb konstrukciót alkalmaztak. A konstrukció jóságának bizonyításához bizonyos feltételes eloszlásoknak a normális eloszlással való jó közelítését kellett bizonyítaniuk. Azt látták be, hogy

$$|S_n - W(n)| = O(\log n) \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

alkalmas konstrukcióval, ha $Ee^{tX_1} < \infty$ minden $|t| \le t_0$ paraméterre valamilyen $t_0 > 0$ számmal.

Továbbá, ebben az esetben a

$$P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k - W(k)| > C\log n + x\right) < Ke^{-\lambda x}$$

egyenlőtlenség is érvényes alkalmas $C > 0$, $K > 0$ és $\lambda > 0$ csak az X_1 valószínűségi változó eloszlásától függő konstansokkal.

A fenti két eredmény éles, és ezek csak akkor érvényesek, ha az $R(t) = Ee^{tX_1}$ momentumgeneráló függvény véges a 0 egy kis környezetében. Ha a momentumgeneráló függvény nem létezik, akkor csak gyengébb approximáció létezik. Az ilyen esetekben érvényes eredmények is ismertek, és ezeket is tárgyalja a könyv. Ezek tárgyalását azonban elhagyom ebből az ismertetésből.

A harmadik fejezet a második fejezetben ismertetett approximációs tételek egy lehetséges alkalmazását mutatja meg. Tekinti $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók $S_n = X_1 + \cdots X_n$, $n = 1, 2, \dots$ részletösszegeinek $S_{n+a_n} - S_n$ alakú különbségeit alkalmas $a_n > 0$ számokkal, és ezek alkalmas funkcionáljait vizsgálja. Azt lehet mondani, hogy megmutatja azt, hogy az első fejezet Wiener folyamatokra bizonyított eredményei érvényben maradnak akkor is, ha azok független valószínűségi változók megfelelő részletösszegeire megfogalmazott természetes megfelelőit vesszük. Az, hogy milyen a_n paraméterekkel maradnak érvényben ezek az állítások függ attól, hogy a tekintett részletösszegeknek milyen jó Gauss approximációjuk van. Érdemes megjegyezni e fejezet azon észrevételét, hogy nem csak a Strassen-féle, hanem a Chung-féle iterált logaritmus tétel is érvenyben marad, ha Wiener folyamatok helyett azok független valószínűségi változók részletösszegeiről szóló természetes megfelelőit tekintjük.

A negyedik fejezet az empirikus eloszlásfüggvény jó approximációját tekinti a Brown bridge-zsel, illetve ezen eredmény néhány alkalmas megfelelőjét. Megadja ezen kívül ezen eredmények néhány alkalmazását is.

Ha adva van $X_1, \dots, X_n$ egyenletes eloszlású valószínűségi változók $F_n(y)$ empirikus eloszlásfüggvénye, illetve annak $\alpha_n(y) = \sqrt{n}(F_n(y) - y$, $0 \le y \le 1$, normalizáltja, akkor ennek a normalizáltnak a következő approximációja lehetséges alkalmas konstrukció segítségével.

Létezik olyan $B_n(y)$, $0 \le y \le 1$, Brown bridge, amelyre

$$P\left(\sup_{0 \le y \le 1} |\alpha_n(y) - B_n(y)| \le n^{-1/2}(C \log n + x)\right) \le Le^{-\lambda s}$$

minden $n = 1, 2, \dots$ és $x > 0$ számra, ahol $C > 0$, $L > 0$ és $\lambda > 0$ univerzális konstansok.

A független valószínűségi változók approximációjáról szóló eredményekhez hasonlóan érdekel minket ennek az eredménynek egy olyan változata, ahol az $\alpha_n(y)$, $n = 1, 2, \dots$ sztochasztikus folyamatok jó együttes approximációját adjuk meg egy alkalmas kétdimenziós Gauss folyamattal a $[0, 1] \times [0, \infty)$ halmazon. Be lehet látni, hogy a természetes jelölt erre a Gauss folyamatra az a Kiefer folyamatnak nevezett $K(y, t)$ folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, amelyre $EK(y, t) = 0$, és

$$EK(y_1, t_1)K(y_2, t_2) = (\min(y_1, y_2) - y_1 y_2) \min(t_1, t_2).$$

Alkalmas approximációval a következő reláció érvényes:

$$P\left(\sup_{1\le k\le n}\sup_{0\le y\le 1}|k^{1/2}\alpha_k(y)-K(y,k)|>C(\log n+x)]\log n\right)\le L^{-\lambda x}$$

minden $n=1,2,\dots$ és $x>0$ számra, ahol $C>0$, $L>0$ és $\lambda>0$ univerzális konstansok.

Innen az is következik, hogy

$$\sup_{1\le n<\infty}\ \sup_{0\le y\le 1}\frac{|n^{1/2}\alpha_n(y)-K(y,n)|}{\log^2 n}\le C \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

alkalmas $C>0$ számmal.

Ez a fejezet tartalmazza egy másik az empirikus eloszlásfüggvény normális approximációjával kapcsolatos probléma vizsgálatát. Bevezeti a quantilis folyamatot, ami heurisztikusan az empirikus eloszlásfüggvény inverze. Ezt a definiciót azonban figyelmesebben kell megadni, mert az empirikus eloszlásfüggvény nem szigorúan monoton és nem folytonos függvény. De ezt a definiciót meg lehet adni, és lehet definiálni e folyamat természetes normalizáltját is. A fejezet tartalmazza az erre a folyamatra vonatkozó eredményeket. Abból, hogy $F_n(x)\sim F(x)$ következik, hogy $F_n^{-1}(x)\sim F^{-1}(x)$. Azt várjuk, hogy az empirikus eloszásfüggvényhez hasonlóan, a quantilis folyamat normalizáltjának is létezik limesze, az Gauss folyamat, és alkalmas approximációval a normalizált empirikus eloszlásfüggvény és ez a limesz Gauss folyamat közel tehető egymáshoz. E fejezet ilyen jellegű eredményeket bizonyít alkalmas feltételek teljesülése esetén, bár a normalizált quantilis folyamatnak csak gyengébb approximációját tudja megadni, mint amilyen a normalizált empirikus eloszlásfüggvények esetében ismert. Bár ezek az eredmények is hasznosak, ebben az ismertetésben mégsem tárgyalom őket. E fejezet másik itt nem tárgyalt anyaga néhány az empirikus eloszlás viselkedéséről szóló klasszikus eredmény.

Az ötödik fejezet az empirikus eloszlásfüggvényről bizonyít be néhány eredményt az előző fejezet eredményeinek a segítségével. Először ismerteti az iterált logaritmus tételt mind az empirikus eloszlásfüggvényre mind a quantilis folyamatra. Megadja az aszimptotikus viselkedését az empirikus és quantilis folyamat néhány klasszikus funkcionáljának. Végül ez a fejezet tartalmaz néhány a matematikai statisztikában fontos eredményt. Ezek közül a legérdekesebb az, amelyik arról szól, hogy hogyan tudjuk jól közelíteni egy eloszlásfüggvény empirikus eloszlásfüggvényének normalizáltját alkalmas Gauss folyamattal, ha a tekintett minta eloszlása egy eloszláscsalád számunkra ismeretlen paraméterű eleme. A könyv tárgyalása egy természetes módszert követ. Megadja a paraméter becslését az aszimptotikusan optimális maximum likelhood módszer segítségével, majd alkalmazza a Gauss approximációt a vizsgált minta normalizált eloszlásfüggvényére, ha a minta eloszlása az adott eloszláscsalád eleme a becsült paraméterrel. A vizsgálat során használja mind a maximum likelyhood becslésről, mind az empirikus eloszlásfüggvény normális approximációjáról szóló tételeket. A bizonyítás természetes, de kidolgozása szükségessé teszi nem triviális technikai problémák megoldását is.

A könyv hatodik fejezete egy új, másfajta hasznos alkalmazását adja a negyedik fejezet eredményeinek az empirikus eloszlásfüggvény normalizáltjának jó approximációjáról Gauss folyamatokkal. Két statisztikai becslés feladatot vizsgál. Az első egy F eloszlásfüggvény (létező) sűrűségfüggvényének a becslése egy n elemű minta alapján. A másik feladat a regresszió függvény becslése egy minta alapján, azaz az $r(x) = E(Y|X = x)$ feltételes várható érték becslése, ha megfigyeljük (Y_1, X_1), (Y_2, X_2), $\dots$, (Y_n, X_n) független, véletlen vektorok olyan sorozatát, amelyek mindegyike ugyanolyan eloszlású, mint az (Y, X) vektor.

Mind a két statisztikai feladatra több megoldási javaslat született. A könyv veszi ezek közül a legnépszerűbbeket, és bebizonyítja azok legfontosabb tulajdonságait. Kiderült, hogy a negyedik fejezet approximációs eredményeinek a segítségével az itt szereplő becslések tulajdonságairól a korábban ismerteknél élesebb eredmények bizonyíthatóak, és a bizonyítások is egyszerűbbek.

Ez a fejezet még egy eredménnyel foglalkozik. Tárgyalja Csörgő Sándor eredményeit az empirikus karakterisztikus függvény tulajdonságairól, és azok jó approximációjáról alkalmas Gauss folyamattal.

Végül a könyv utolsó, hetedik fejezete valószínűségi változók véletlen tagszámú összegeinek a viselkedésével foglalkozik. Ezeknek a problémáknak a vizsgálatában is hasznosnak bizonyultak a könyvben bizonyított approximációs tételek.

3.) **Random walk in random and non-random environments**

Ez a könyv véletlen bolyongásokról szól. Három önálló részből áll. Az első rész az egydimenziós bolyongásokkal kapcsolatos problémákat vizsgál, olyanokat, ahol a bolyongás az egész számok halmazán történik, és minden lépésében $\frac{1}{2}$ valószínűséggel előre, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel hátra teszünk egy lépést. A második rész témája a d-dimenziós bolyongás $d \geq 2$ esetén. Ekkor a d-dimenziós rácson bolyongunk, és minden lépésben a $2d$ szomszéd valamelyikébe lépünk $\frac{1}{2d}$ valószínűséggel. A harmadik rész véletlen közegben való bolyongással foglalkozik az egész számok halmazán. Olyan modellt tekintünk, ahol a kezdet kezdetén kisorsolunk egy $0 < p_k < 1$ valószínűséget minden k egész számra egymástól függetlenül és ugyanolyan eloszlással. Olyan bolyongást végzünk amelyikben a 0 pontból indulunk, és ha valamelyik időpontban a k pontban tartózkodunk, akkor (a bolyongás múltjától függetlenül) p_k valószínűséggel a $k+1$ és $q_k = 1 - p_k$ valószínűséggel a $k-1$ pontba lépünk. (A könyv a $p_k = E_k$ jelölést használja.) Ennek a bolyongásnak a viselkedését akarjuk minél jobban megérteni.

Ez a három téma három különböző problémakört érint, és bár a vizsgálati módszerekben van átfedés, vizsgálatuk különböző módszert igényel. E problémáknak van némi átfedése a korábban tárgyalt könyvekben vizsgált problémákkal, bizonyos esetekben azok speciális esetének tekinthetők, mégis érdemes velük külön foglalkozni. Egyrészt új, érdekes problémák merülnek fel, másrészt segítenek az általános esetekben kapott eredmények jobb megértésében. Mivel nagyon sok az eredmény, ráadásul ezek részletes ismertetése rengeteg jelölés bevezetését igényelné, ezért itt csak a számomra legérdekesebb eredményekről írok, és azokat sem fogalmazom meg mindig pontosan. Inkább azok jellegét próbálom megmagyarázni, azok hangulatát próbálom érzékeltetni.

Az első rész vizsgálatai két téma körül csoportosulnak. Legyen adva független, egyforma eloszlású $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók sorozata, $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ eloszlással, és tekintsük azok $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \dots$ részletösszegeit.

Az első téma az S_n, $M_n^+ = \sup\limits_{0 \leq k \leq n} |S_k|$, $M_n = \sup\limits_{0 \leq k \leq n} S_k$ és az $S_{n+a} - S_n$ alakú különbségekből képzett

$$I_1(n, a) = \max_{0 \leq k \leq n-a} (S_{k+a} - S_k)$$

és

$$I_2(n, a) = \max_{0 \leq k \leq n-a} |S_{k+a} - S_k|$$

alakú valószínűségi változókból álló sorozatok viselkedéséről szól.

A másik témában

$$\xi(x, n) = \#\{k\colon\ 0 < k \leq n,\ S_k = x\}$$

alakú valószínűségi változókat tekintünk, amelyek azt mérik, hogy a bolyongás mennyi időt töltött a $(0, n]$ időintervallum során az x pontban, és az ilyen valószínűségi változóktól függő események tulajdonságait vizsgáljuk.

Az első téma tárgyalása azzal kezdődik, hogy az előbb felsorolt valószínűségek közül néhánynak kiszámítjuk az eloszlását, együttes eloszlását, illetve jó becsléseket adunk ezekre az eloszlásokra. Ezután a könyv ismerteti a nagy számok törvényét, illetve az iterált logaritmus tételt. Érdemes megjegyezni, hogy az iterált logaritmus tétel érvényben marad akkor is, ha az S_n részletösszegeket az M_n^+ vagy M_n maximumokkal helyettesítjük.

Révész Pál azonban ennél is élesebb eredményeket ismertet az S_n részletösszegek nagyságának 1 valószínűséggel való viselkedéséről. Arra is kiváncsi, hogy milyen a_n sorozatokra mondhatjuk azt, hogy $S_n < a_n$ minden elég nagy n indexre, vagy azt, hogy $S_n > a_n$ végtelen sok n indexre 1 valószínűséggel. Ismertet egy erről szóló Erdőshöz, Fellerhez és Kolmogorov–Petrovszkijhoz kapcsolódó eredményt, amely szerint az, hogy a kívánt egyenlőtlenség teljesül-e minden elég nagy n számra attól függ, hogy bizonyos az a_n sorozattól függő végtelen összeg konvergens-e vagy divergens. Nem ismertetem magát az eredményt, azt hiszem elég felidézni annak alábbi következményét.

$$S_n \le (n(2 \log\log n + (3+\varepsilon) \log\log\log n))^{1/2} \quad \text{1 valószínűséggel,}$$

minden elég nagy n indexre, és

$$S_n \ge (n(2 \log\log n + 3 \log\log\log n))^{1/2} \quad \text{1 valószínűséggel}$$

végtelen sok n indexre.

Ez a becslés érvényes nem csak az S_n összegekre, hanem az M_n^+ és M_n maximumokra is. A könyv nem csak felső, hanem alsó becslést is ad az M_n^+ és M_n kifejezések nagyságára. Ezen tételek szerint, hasonlóan az előző tételhez, egy összeg konvergenciája vagy divergenciája dönti el azt, hogy e kifejezések egy adott szint fölött vannak-e véges sok kivétellel vagy sem. E tételek egyik következménye a korábban már említett Chung-féle iterált logaritmus tétel.

Foglalkozik a könyv az úgynevezett tiszta fejek problémával, és e probléma néhány természetes változatával is. Itt is megjelentek az előzőekhez hasonló eredmények. A könyv megmutatja azt, hogy ha Z_N-nel jelöljük az $X_1 \dots, X_N$ sorozatban levő leghosszabb tiszta fej (csupa 1-es jelből álló) sorozat hosszát, akkor igaz a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{Z_N}{\log_2 N} = 1 \quad \text{1 valószínűséggel}$$

reláció. A könyv vizsgálja, hogy nem lehet-e pontosabb becslést is adni a Z_N sorozat nagyságára, illetve e probléma néhány természetes változatára, ahol egy majdnem tiszta fej részsorozatot keresünk, azaz olyan viszonylag hosszú sorozatot, amelynek kevés kivétellel minden tagja 1-gyel egyenlő. A könyv számos ilyen eredményt tartalmaz, de ezek tárgyalását elhagyom ebből az ismertetésből.

Ezután a könyv a Wiener folyamatokkal foglalkozik. Ismerteti az invariancia elvet, azt, hogy milyen jól lehet approximálni az S_n részletösszegek sorozatát Wiener folyamattal, bebizonyít néhány becslést a Wiener folyamatokról, és azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy ezek megfelelője érvényben marad-e az S_n sorozatokra is.

Az egyik fontos, a Wiener folyamatok viselkedéséről szóló tétel, amelyik a Wiener folyamat növekményeinek nagyságával foglalkozik, azt mondja, hogy a Wiener folyamatok megváltozására bizonyos intervallumok rendszerén az iterált logaritmus tételhez hasonló tétel érvényes, csak egy új γ_t normalizálási faktor jelenik meg, amely figyelembe veszi azt, hogy milyen hosszú intervallumokon vettük a megváltozásokat.

A következő állítás igaz. Ha a_t a t változó olyan nem csökkenő függvénye, amelyre $0 < a_t < t$, és $\frac{t}{a_t}$ nem csökkenő függvény, akkor

$$\limsup_{t\to\infty} \gamma_t(W(t+a_t) - W(t)) = 1 \quad 1 \text{ valószínűséggel},$$

ahol

$$\gamma_t = \gamma(t, a_t) = \left(2a_t\left(\log\frac{t}{a_t} + \log\log t\right)\right)^{-1/2}.$$

A könyv foglalkozik ezen eredmény megfelelőjével akkor, ha Wiener folyamat helyett az S_n sorozat viselkedését vizsgáljuk. Az S_n sorozat jó approximálhatósága miatt Wiener folyamattal az $a_n \gg \log n$ esetben az eredmény következik a Wiener folyamatról szóló tételből. A többi esetet vizsgálja a könyv. Ezekben az esetekben az eredmény eltér a Gauss és nem Gauss esetben.

Ezután a könyv ismerteti a Strassen-féle iterált logaritmus tételt. Ennek a $W(t)$ Wiener folyamatra és az S_n sorozatra vonatkozó, a hagyományos iterált logaritmus tételhez kapcsolódó alakjával már találkoztunk. Viszont, ami érdekes az az, hogy a fentebb megfogalmazott és a Wiener folyamat növekményének nagyságáról szóló, az iterált logaritmus tételhez hasonló eredménynek szintén létezik Strassen-féle változata. Ebben a változatban a $\beta_t =$

$(2t \log\log t)^{-1/2}$ normálást a $\gamma_t = \gamma(t, a_t) = \left(2a_t\left(\log \frac{t}{a_t} + \log\log t\right)\right)^{-1/2}$ normálás helyettesíti. Mivel ennek az eredménynek a pontos megfogalmazása sok apró részlet kidolgozását igényli, ettől eltekintek. Végül megjegyzem, hogy a könyv idézi Wichura egy tételét is, ami tekinthető a Chung-féle iterált logaritmus tétel Strassen tétel típusú általánosításának.

Az első rész második témájának a tárgyalása bizonyos, az egyes x pontokban egy rögzített n időpontig való $\xi(x, n)$ tartózkodási idő viselkedésével kapcsolatos valószínűségi változók eloszlásának kiszámításával és az ezekhez kapcsolódó határeloszlás tételek ismertetésével kezdődik. Bevezeti a könyv a

$$\rho_1(k) = \min\{n\colon\ S_n = k\}$$

mennyiségnek, azaz annak a valószínűségi változónak a definicióját, amelyik megadja, hogy melyik időpontban látogatjuk meg először a k pontot. Ismerteti a $\rho_1(k)$, $\xi(x, n)$, $\xi(k, \rho_1)$ valamint annak a valószínűségi változónak az eloszlását, amely megadja, hogy a $[0, n]$ időintervallumban az S_k valószínűségi változó hányszor vett fel pozitív értéket. (Ennél a definiciónál figyelmesnek kell lennünk. Az $S_k = 0$ esetén akkor vesszük figyelembe a k pontot, ha $S_{k-1} > 0$.) Ugyancsak szerepel képlet a könyvben arról, hogy az n időpontig a bolyongás, hol vette fel utoljára a 0 értéket, illetve az $M^+(n)$ maximumát.

E képletek segítségével lehet határeloszlás tételeket bizonyítani a megfelelő mennyiségekre. Az így kapott, és a könyvben szereplő határeloszlás tételek közül a leghíresebb az az arcus-sinus törvénynek nevezett eredmény, amely megadja annak aszimptotikus értékét, hogy a bolyongás idejének hanyadrészét töltötte a pozitív félegyenesen a $[0, n]$ időintervallumban.

A vizsgálat következő pontja az, hogy bizonyítsunk be funkcionális határeloszlás tételt a $\xi(x, n)$ lokális idők sorozatára (mint az x változó függvényére rögzített n (idő)paraméterrel), és adjunk jó becslést a konvergencia sebességére. Ahhoz, hogy ezt megtehessük először definiálni kell a Wiener folyamat lokális idejét, mert ez jelenik meg a limeszben. Ez a definició mély matematikai eredményeken alapul.

A definició megtétele érdekében először vezessük be a következő (véletlen) $H(\cdot, t)$ mértéket a számegyenes Borel részhalmazain minden $t > 0$ paraméterre:

$$H(A, t) = \lambda\{s\colon s \le t,\ W(s) \in A\}$$

minden $A \subset R^1$ Borel mérhető halmazra.

Be lehet látni, hogy $H(\cdot,t)$ abszolút folytonos mérték, és a Radon–Nikodym deriváltja (a Lebesgue mérték szerint), amelyet $\eta(x,t)$-vel fogunk jelölni az x és t változók folytonos függvénye. Ezt az $\eta(x,t)$ függvényt fogjuk a Wiener folyamat lokális idejének nevezni. Igaz a következő konvergencia sebességgel ellátott invariancia elvnek tekinthető approximációs tétel.

Létezik olyan konstrukció, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/4-\varepsilon} \sup_x |\xi(x,n)-\eta(x,n)| = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

minden $\varepsilon > 0$ számra.

A Wiener folyamat lokális idejére érvényes az alábbi Paul Lévy által bizonyított eredmény.

$$\{y(t),\, m^+(t);\; t\ge 0\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{|W(t)|,\, \eta(0,t);\; t\ge 0\}$$

ahol $m^+(t) = \sup\limits_{0\le s\le t} W(t)$, $y(t) = m^+(t) - W(t)$, és $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ azt jelöli, hogy a kifejezés két oldalán álló sztochasztikus folyamatnak megegyezik az eloszlása.

Ez a reláció hasznos. Ebből és a korábbi eredményekből például azonnal következik, hogy a Wiener folyamat és a bolyongás lokális idejére is érvényes az iterált logaritmus tétel.

Felmerülhet a kérdés, hogy igaz-e ezen eredmény természetes megfelelője a bolyongásra. A válasz az, hogy eredeti formájában egy ilyen állítás nem igaz, mert az olyan valószínűségi változók eloszlásának az azonosságát jelentené, amelyek, ha Wiener folyamatok helyett bolyongásokat tekintünk, akkor csak aszimptotikusan egyenlőek. Viszont be lehet bizonyítani a fenti azonosság által sugallt reláció helyett annak egy olyan gyengített változatát, amely szerint lehet olyan konstrukciót csinálni, amelyben a várt anonosság két oldalán álló kifejezéssel azonos eloszlású sztochasztikus folyamatokat definiálunk, és azok nagyon közel vannak egymáshoz. Az ilyen eredmények hasznosak. Nem fogalmazom meg pontosan azt, hogy milyen állítást lehet bizonyítani.

A könyv következő vizsgálati témája az a kérdés, hogy milyen 1 valószínűséggel érvényes becsléseket tudunk mondani a lokális idővel kapcsolatos mennyiségekre, ha azok viselkedését a teljes $[0,\infty)$ intervallumon tekintjük. Először, hasonlóan a független valószínűségi változók nagyságáról szóló vizsgálatokhoz, azt vizsgálja, hogy milyen a_n sorozatokra érvényes a $\xi(x,n) \le a_n$ egyenlőtlenség minden elég nagy n számra. Hasonló vizsgálatokat tesz, ha $\xi(x,n)$ helyett a $\xi(n) = \sup\limits_x \xi(x,n)$ mennyiségeket tekinti. Tekinti e probléma természetes megfelelőjét Wiener folyamatokra, amikor a $\xi(x,n)$ lokális idő helyett az $\eta(x,t)$ lokális időt, a $\xi(n)$ maximum helyett az $\eta(t)=\max_x \eta(x,t)$ maximumot vizsgáljuk. További vizsgálatok tárgya az, hogy milyen becsléseket mondhatunk az $(\eta(x,t)-\eta(x,t-a_t)$ és a $(\xi(x,n)-\xi(x,n-a_n)$ alakú növekmények nagyságáról.

Az iterált logaritmus tétel megfelelőjével is foglalkozik a könyv. Ismerteti azt a Csáki–Révész eredményt, amely szerint a lokális idők természetes normalizáltja teljesíti a Strassen-féle iterált logaritmus tétel megfelelőjét. Egy különbség van ezen eredmény és annak klasszikus esetben bizonyított megfelelője között. A klasszikus esetben az ezen ismertetés korábbi részében már bevezetett $\mathcal{S}$ a limesz függvények halmaza. Itt kissé más a helyzet. A lokális idő az idő monoton növekvő függvénye, és a limesz függvények megőrzik ezt a tulajdonságot. Ezért itt a limesz függvények halmaza az $\mathcal{S}$ halmaz monoton növekvő függvényeiből áll.

Egy másik itt vizsgált téma az, hogy a $\xi(x,n)-\xi(y,n)$ különbség mekkora kis $x-y$ esetén. Elsősorban a $\xi(1,n)-\xi(0,n)$ különbség nagyságára adnak becsléseket. Megjegyzem, hogy a most említett problémakörről, a lokális idő 1 valószínűséggel való viselkedéséről a könyv rendkívül sok eredményt ismertet, és ezeknek csak egy kis részéről írtam.

A könyv első részének további tartalmát csak nagyon röviden, vázlatosan ismertetem. Bevezeti a könyv a kirándulás (excursion) fogalmát mind a bolyongás mind a Wiener folyamat esetében. Ez egy nagyon természetes fogalom. A bolyongás trajektóriájának egy (n,S_n) vagy a Wiener folyamat trajekróriájának egy $(t,W(t))$ pontját tartalamzó kirándulás a trajektóriának az az ezt a pontot tartalmazó darabja, amely mind időben előre, mind időben hátra először éri el az abszcissza tengelyt. A könyv számos becslést ad a kirándulás trajektóriáinak a viselkedéséről. Sok valószínűségi problémában vizsgálják a kirándulásokat. Itt meg van említve, hogy segítségükkel és egy "mesure de voisinage" fogalmat bevezetve meg lehet adni a Wiener folyamat lokális idejének egy másik definicióját. Egy másik itt vizsgált kérdés az, hogy mit mondhatunk a bolyongás leginkább és legkevésbé látogatott pontjairól a $[0,n]$ időintervallumban. A könyv nem triviális becsléseket ismertet arról, hogy a leggyakrabban látogatott pontokat hányszor látogatta meg a bolyongás, és hány ilyen pont van. Arról is van nem triviális eredmény, hogy hány olyan pont van, amelyet a bolyongás pontosan egyszer látogatott meg a $[0,n]$ időintervallumban.

Végül a fejezet tartalmaz egy olyan beágyazási tételt, amely lehetővé teszi a $\eta(x,t)$ lokális idő tulajdonságainak a vizsgálatát tetszőleges x pontban a $\eta(0,t)$ lokális idő tulajdonságainak a segítségével.

A könyv második része a több-dimenziós rácson való bolyongásról szól, és másfajta kérdéseket vizsgál, mint az első rész. Ismeretes Pólyának az az eredménye, amely szerint a bolyongás 1 valószínűséggel visszatér a kiindulási helyére 1 és 2 dimenzióban, míg 3 és annál magasabb dimenzióban ezt csak 1-nél kisebb valószínűséggel teszi meg. Ha 1 valószínűséggel visszatér, akkor az is igaz, hogy 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér, míg a másik esetben nulla valószínűséggel tér vissza az origóba végtelen sokszor. A könyv második részének eredményei tekinthetők úgy, mint ennek a tételnek a finomításai, folytatásai. A könyv ezen része olyan kérdéseket vizsgál, amelyek eredményei ezen tétel természetes folytatásai. A d-dimenziós bolyongás mellett vizsgálja a d-dimenziós Wiener folyamatot is, amelynek viselkedéséről hasonló kérdéseket lehet feltenni, és a válaszok is nagyon hasonlóak, mint a bolyongás esetében. Megfogalmazom, hogy milyen kérdéseket tárgyal a könyv, és arra milyen jellegű válaszokat ad, de a pontos képletek többségét elhagyom.

A könyv először jó becsléseket ad arra, hogy a bolyongás (különböző dimenziókban) az n-ik lépésben visszatér az origóba, és ennek segítségével belátja Pólya tételét. Három és magasabb dimenziós bolyongás esetén arra is jó becslést ad, hogy a bolyongás milyen valószínűséggel tér vissza az origóba, és milyen valószínűséggel látogat meg egy x pontot n idő alatt. Ezután bevezeti a d-dimenziós Wiener folyamatot, tárgyalja, hogy a d-dimenziós bolyongást milyen jól lehet approximálni Wiener folyamattal. A kétdimenziós esetben egy egyszerű, de ravasz transzformáció segítségével megmutatja, hogy ugyanolyan jó approximáció létezik, mint az egydimenziós esetben. Magasabb dimenzióban csak gyengébb approximációs eredmény ismeretes. Tekinti a bolyongásról szóló visszatérési tételek megfelelőjét Wiener folyamatra. Két dimenzióban a bolyongás 1 valószínűséggel bármilyen távoli időpont után meglátogatja az origó egy rögzített, kis ε sugarú környezetét, míg magasabb dimenziókban ez a valószínűség nulla. Spitzer egy pontos aszimptotikát is adott annak valószínűségére, hogy a kétdimenziós bolyongás meglátogatja az origó ε sugarú környezetét egy $[t_1,t_2]$ időintervallumban.

Ezután a könyv az egydimenziós esethez hasonló tételeket tárgyal a többdimenziós bolyongás és a Wiener folyamat nagyságáról. Tárgyalja a Strassen-féle iterált logaritmus tétel változatát ebben az esetben, és becsléseket ad arról, hogy bizonyos valószínűségi vektorok normájának a sorozata mikor kisebb minden nagy indexre egy előírt korlátnál.

A könyv következő témája a lokális idő, azaz azon $\xi(0,n)$ és $\xi(x,n)$ valószínűségi változóknak a vizsgálata, amelyek azt mérik, hogy hányszor látogatta meg a bolyongás az origót, illetve az x pontot az n időpontig. Természetesen a $d=2$ és $d\ge 3$ dimenziók esetét külön érdemes vizsgálni. A $d=2$ esetben jó aszimptotikus becslés létezik a $P(\xi(0,n)<x\log n)$ valószínűségre, és van még néhány hasonló, érdekes eredmény. A $d\ge 3$, azaz a tranziens esetben $\xi(0,n)$ nagyon kicsi. Ezért érdemes helyette inkább a $\xi(n)=\sup\limits_{x\in Z^d}\xi(x,n)$ valószínűségi változó nagyságát vizsgálni. Érvényes a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi(n)}{\log n}=\lambda_d \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

reláció ismert $\lambda_d>0$ konstanssal. Az a sejtés, hogy a $d=2$ esetben létezik egy hasonló eredmény $\log^2 n$ normálással. Vannak további eredmények is a $\xi(n)$ valószínűségi változó viselkedéséről, de ezeket elhagyom.

A könyv következő vizsgált témája az, hogy a bolyongás hány különböző pontot látogat meg a $[0,n]$ időintervallumban. Ennek értékét $R(n)$-nel jelöli. Megadja az $R(n)$ mennyiségek aszimptotikus várható értékét és szórásnégyzetét, amelyeknek nagyságrendje különböző a $d=2$, $d=3$, $d=4$ és $d\ge 5$ esetekben. Ezután ismerteti a centrális határeloszlás tételt az $R(n)$ valószínűségi változókra, illetve annak egy erősebb változatát, amelyben megadja az $R(n)$ sorozat normalizáltjának egy jó approximációját Wiener folyamatokkal. Valójában a $d=2$ esetben a centrális határeloszlás tétel helyett egy másfajta törvényszerűség érvényes.

A következő téma a súlyos pontok számának a vizsgálata a $d\ge 3$ esetben. Ez a következőt jelenti. Jelölje $Q_k(n)$ azon pontok számát, amelyeket a bolyongás pontosan k alkalommal látogatott meg a $[0,n]$ időintervallumban. Jó becslés ismeretes $Q_k(n)$-re rögzített k esetében. Olyan eredményt kívánunk bizonyítani, amely becslést ad a $Q_{k(n)}(n)$ értékére a $k(n)\to\infty$ $n\to\infty$ esetben is. Bizonyos sávban ez lehetséges. A könyvben erről szóló pontos eredmény ismertetését elhagyom. Ugyancsak elhagyom annak ismertetését, hogy milyen hasonló eredményeket lehet bizonyítani arról, hogy egy rögzített tartomány eltoltjai között hány olyan van, amelyik a bolyongás által meglátogatott pontok közül viszonylag sokat tartalmaz. Ugyancsak tartalmazza a könyv az utóbbi probléma természetes megfelelőjét Wiener folyamatokra, aminek tárgyalását szintén elhagyom.

A könyv tartalmaz két érdekes kérdést a bolyongások lehetséges önmetszéséről, illetve ismerteti az ezekre ismert válaszokat.

Az első kérdés: Milyen $f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, függvényre igaz, hogy a

$$\{S_1, \ldots, S_n\} \text{ és } \{S_{n+f(n)}, S_{n+f(n)+1}, \ldots\}$$

sorozatoknak 1 valószínűséggel végtelen sok n indexre van közös pontjuk. (Csak a $d \geq 3$ dimenzió érdekes.)

Második kérdés: Tekintsük egy $S_1, S_2, \ldots$ bolyongás pályáját $d \geq 3$ dimenzióban. Egy S_n pontot jónak nevezünk, ha az $S_1, \ldots, S_n$ és $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$ sorozatoknak nincs közös pontjuk. Hány jó pont van?

A könyv ismerteti az ezekre a kérdésekre adott válaszokat és e kérdések természetes változatairól szóló eredményeket. Ilyen erdmény például az, hogy két független bolyongás pályájának végtelen sok közös pontja van 4 dimenzióban, és csak véges sok 5 és magasabb dimenzióban. Ugyancsak érdekes eredmények vannak Wiener folyamatokról. Ezeknek van duplapontjuk $d \geq 3$ és nincsen duplapontjuk $d \geq 4$ dimenzióban. A könyv még említ további hasonló típusú érdekes problémákat és eredményeket.

További vizsgálatok és eredmények vannak a könyvben arról, hogy mekkora gömbőket fed be a 2 dimenziós bolyongás teljesen az n időpontig. Mekkora gömböt fed be, ha csak az origó középpontú gömböket tekintjük, és mekkorát akkor, ha tetszőleges középpontot megengedünk. Mit mondhatunk, ha csak majdnem befedett gömböket keresünk, amelyekben a lefedett pontok számának aránya tart 1-hez, amikor $n \to \infty$? Hasonló vizsgálatokat és eredményeket tartalmaz a könyv a $d \geq 3$ dimenzió esetében is.

Egy további vizsgálati téma a kirándulások hosszának (azaz az origó egymást követő meglátogatásai közötti idő hosszának) a vizsgálata. A kétdimenziós eset a legérdekesebb, amikor végtelen sokszor meglátogatjuk az origót. Arra vagyunk kíváncsiak mekkorák az n időpontig történő kirándulások hosszai, hány kirándulás tölti ki a $[0, n]$ időintervallum nagy részét. Az a meglepő eredmény érvényes, hogy az n időpontig történt két leghosszabb kirándulás a domináns, ezek összhossza n-nel osztva 1-hez tart amikor $n \to \infty$.

Még egy a több-dimenziós bolyongásokkal kapcsolatos problémával foglalkozik a könyv. Jó becslést akarunk adni arra, hogy a $d \geq 3$ dimenzió esetében a bolyongás aszimptotikusan hányszor metszi az R sugarú origó középpontú kört, ha $R \to \infty$. A könyv erről csak egy sejtést fogalmaz meg, amit viszont alátámaszt a több-dimenziós Wiener folyamatokról szóló analóg probléma ismert megoldása. Itt is az R sugarú gömbök átmetszéseinak a számára vagyunk kíváncsiak. De ebben az esetben először pontosan meg kell fogalmazni, hogy mit értünk az átmetszések számán. Ezek után be van bizonyítva hogy az átmetszések számának a nagyságrendje const. $R \log R$.

A könyv említ még néhány általános problémát amelyek kapcsolódnak a több-dimenziós bolyongás elméletéhez. Ilyen a Laplace operátor vizsgálatának a kapcsolata a valószínűségszámítással és a perkoláció problémája.

A könyv harmadik témájának, a véletlen közegben való bolyongásnak a vizsgálatában feltesszük, hogy a kisorsolt $p_k = E_k$ valószínűségek teljestik a $P(\beta < E_0 < 1-\beta) = 1$ feltételt 1 valószínűséggel valamilyen $\beta > 0$ számmal, valamint a vizsgálatban rendkívül fontos szerepet játszó

$$V_k = \log \frac{E_k}{1 - E_k} = \log \frac{p_k}{q_k}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

valószínűségi változókra érvényes a $0 < EV_0^2 < \infty$ azonosság.

Solomon egy eredménye alapján a bolyongás lineáris sebességgel a végtelenhez tart, ha $EV_0 > 0$, és a mínusz végtelenhez tart, ha $EV_0 < 0$. Szinaj bebizonyította azt, hogy, ha $EV_0 = 0$ akkor a bolyongás egy rendkívül váratlan és érdekes határ-eloszlás tételt teljesít.

Tekintsünk két A és B számot, amelyekre $A < 0$, $B > 0$. Mind Solomon mind Szinaj eredménye felhasznál egy formulát, amely megadja annak a valószínűségét, hogy az origóból kiinduló bolyongás az A pontot előbb éri el, mind a B pontot, és egy másik formulát, amely megadja annak az időnek a várható értékét, ami addig tart, amíg ez a bolyongás eléri az A és B pontok valamelyikét. Nem adom meg ezen formulák explicit alakját. Viszont nagyon fontos, hogy mind a két formula függ a

$$\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{p_k}{q_k} \right) = \exp \left\{ \sum_{k=0}^{n} V_k \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

kifejezésektől. Emiatt függ mind Solomon mind Szinaj eredménye az EV_0 várható értéktől.

Szinaj azt látta be, hogy az $EV_0 = 0$ feltétel teljesülése esetén típikus E_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ környezetben az S_n bolyongás nagy n indexre egy olyan az E_k átmenetvalószínűségektől függő pont közelében lesz nagy valószínűséggel, amelynek az origótól vett távolsága $\log^2 n$ nagyságrendű. E pont meghatározása érdekében bevezette a következő V_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, valószínűségi változóktól függő valószínűségi változó sorozatot az egész számok halmazán:

$$T_0 = 0,\ T_n = V_1 + \cdots + V_n,\ T_{-n} = V_{-1} + \cdots + V_{-n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Bevezette a T_n valószínűségi változók által meghatározott gödrök fogalmát, bebizonyította azok legfontosabb tulajdonságait, és ennek segítségével bizonyította be határeloszlás tételét.

Szinaj egy a T_n, $n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ sorozatnak egy az origót tartalmazó $[A, B]$ intervallumra vett megszorítását, $A < 0 < B$, gödörnek nevezte v mélyponttal, ahol $A < v < B$ akkor, ha

$$T_v = \min_{A \le u \le B} T_u, \quad T_A = \max_{A \le u \le v} T_u, \quad T_B = \max_{v \le u \le B} T_u.$$

Azt mondta, hogy e gödör mélysége $\min\{T_A - T_v, T_B - T_v\}$.

Szinaj bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy egy mély gödörbe viszonylag egyszerű beleesni, és ha benne vagyunk, akkor általában a gödör mélyén tartózkodunk, és nagyon sokáig tart, amíg a gödörből kimászunk. Szinaj azt látta be, hogy az n időpontban majdnem 1 valószínűséggel az egyik gödör alján tartózkodunk. Azt is meghatározta, hogy melyik ez a gödör.

Azokat a gödröket tekintette, amelyeknek a mélysége legalább $\log n$. Belátta, hogy ezek között van egy legkisebb, és az n időpontban majdnem biztos, hogy ennek a gödörnek az alján tartózkodunk. Továbbá, ennek a gödör mélypontnak a távolsága az origótól $(\log n)^2$ nagyságrendű.

Ez Szinaj tétele. Ez írja le a bolyongás állapotát annak számára, aki ismeri a bolyongás környezetét, azaz a kisorsolt E_k átmenet valószínűségek értékét. A könyv terminológiája szerint ezt látja az Úristen (the Lord). Harry Kesten kiszámolta ennek a véletlen határpontnak az eloszlását a véletlen környezet eloszlásának az ismeretében. Ismét a könyv terminológiáját használva azt mondhatjuk, hogy ezt látja egy fizikus.

Révész Pált még érdekelte az is, hogy 1 valószínűséggel milyen messze távolodik el ez a véletlen környezetben történő bolyongás. Az $M^+(n) = \sup_{k \le n} S_k$ mennyiség nagyságrendjét vizsgálta. A következő eredményt látta be Paul Deheuvels-szel közösen.

$$\frac{\log^2 n}{(\log\log n)^{2+\varepsilon}} \le M^+(n) \le \left(\log n (\log\log\log n \cdots (\log_{p-1} n)^{1+\varepsilon})\right)^2$$

1 valószínűséggel majdnem minden n indexre

minden $\varepsilon > 0$ számra, ahol $\log_p$ a logaritmus függvény p-szeres iteráltját jelöli.

4.) **Random walks of infinitely many particles**

Előfordul, hogy sok olyan egymástól független stochasztikus folyamat együttes viselkedését kell vizsgálni, amelyek viselkedését jól értjük, de az egymástól független rendszerek együttes viselkedésének a vizsgálata új problémákat vet fel. Ilyen problémák vizsgálatával foglalkozik ez a könyv. Két különböző tipusú sztochasztikus folyamat jelenik meg ezekben a rendszerekben. Az egyik a véletlen bolyongás, a másik az elágazási folyamatok.

Ez a könyv három fő részből áll. Az első részben olyan modellek viselkedését vizsgáljuk, amelyekben a nulla időpontban különböző részecskék vannak vannak véletlenül elhelyezve valamilyen eloszlás szerint az R^d d-dimenziós Euklideszi térben, és az egyes részek egymástól független véletlen mozgást végeznek valamilyen ismert valószínűségi törvény szerint. Ennek a rendszernek vizsgáljuk különböző tulajdonságait

A második részben, ez a könyv fő része, a kiinduló nulla időpontban egy vagy több egyed van elhelyezve vagy az R^d d-dimenziós Euklideszi térben vagy a d-dimenziós tér egész koordinátájú pontjainak Z^d rácsán. Ezen egyedek, majd ezek utódai egy elágazási folyamatban vesznek részt. Továbbá az utódok valamilyen valószínűségi törvények szerint mozognak egymástól függetlenül. Le akarjuk írni ennek a rendszernek a viselkedését, ha ismerjük mind az elágazási folyamatokat mind az egyedek mozgását meghatározó valószínűségi törvényeket.

A harmadik rész szorosan kapcsolódik a második részhez. Itt az egyik a második részben vizsgált modellt vizsgáljuk, és megmutatjuk, hogy erre is érvényes egy a Strassen-féle iterált logaritmus tételhez hasonló eredmény.

Az első rész elsősorban a következő modellel foglalkozik. A nulla időpontban legyenek pontszerű részecskék elhelyezve a d-dimenziós Euklideszi térben. Ezek együttese alkosson Poisson mezőt valamilyen $\lambda > 0$ paraméterrel a d-dimenziós Euklideszi térben. Mindegyik részecske mozogjon egymástól függetlenül, és a mozgásuk legyen Wiener folyamat. A könyv első része ennek a rendszernek a tulajdonságait vizsgálja. Sok eredményt bizonyít. Itt csak példaként megemlítek egyet. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hány részecske lép be a T időpontig az origó körüli egységgömbbe. A könyv megmutatja, hogy ez Poisson eloszlású, és meghatározza annak paraméterét, ami függ az Euklideszi tér d dimenziójától. Azzal a kérdéssel is foglalkozik, hogy ha ezt az egységgömböt meglátogató pontok eltűnnek, akkor mekkora üres gömb keletkezik az origó körül a T időpontban. Ismerteti ennek az eloszlását. Az első rész azzal a kérdéssel is foglalkozik, hogy milyen általánosabb modellekben kapunk hasonló eredményeket, mint az itt tárgyalt esetben.

A könyv ismerteti a második rész bevezetésében az általa használt legfontosabb eredményeket az elágazási folyamatok tulajdonságairól. Ezek a következők.

Legyen adva egy részecske, amelyik az 1 időpontban szül Y számú részecskét, és aztán meghal. Legyen

$$P(Y=k)=p_k \quad k=0,1,2,\dots, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

és jelölje

$$m=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k$$

a született utódok számának várható értékét. Az utódok ezután a múlttól és egymástól függetlenül ilyen eloszlás szerint születnek és halnak meg az egymást követő időpontokban. Három különböző esetet különböztetünk meg.

Azt mondjuk, hogy a rendszer szubkritikus, ha $m<1$, kritikus, ha $m=1$, és szuperkritikus, ha $m>1$. Ismeretes, hogy a szubkritikus és kritikus rendszerek 1 valószínűséggel véges időn belül kihalnak, míg a szuperkritikus rendszerek valamilyen $p>0$ valószínűséggel soha nem halnak ki, és jó becslés ismeretes az ilyen rendszerek nagyságára az n időpontban. Ha B_n-nel jelöljük a rendszer elemszámát az n időpontban, akkor igaz az, hogy létezik olyan B valószínűségi változó, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_n}{m^n} = B$ 1 valószínűséggel, és $P(B=0)<1$. Továbbá $EB=1$, és ismeretes B szórásnégyzete is.

A könyv szuperkritikus és kritikus rendszerekkel foglalkozik. Az első vizsgált modell a következő. Tekintsük az egész koordinátájú pontokból álló Z^d rácsot a d-dimenziós Euklideszi térben. A nulla időpontban az origóban ül egy részecske, amelyik valamelyik véletlenül kiválasztott szomszéd pontba ugrik, ott utódokat szül, és meghal. Az utódok hasonló módon valamelyik véletlenül kiválasztott szomszéd pontba ugranak, ott szülnek és meghalnak. Mindezt egymástól függetlenül teszik, és ugyanolyan eloszlás szerint szülnek. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen eloszlást mutat a populáció az n időpontban nagy n értékekre. Szuperkritikus elágazási folyamatot tekintünk. A könyv bevezeti a $\lambda(x,T)$, $x\in Z^d$, $T=0,1,2,\dots$, mennyiséget, amely azt jelöli, hogy a T időpontban hány részecske tartózkodik az x pontban. A $\lambda(x,T)$ viselkedésére vagyunk kíváncsiak a $T \to \infty$ esetben.

Jó eredményeket ismerünk mind a véletlen bolyongások mind az elágazási folyamatok viselkedéséről. A feladat az, hogy ezek segítségével leírjuk a fenti folyamat viselkedését is. Kiderült, hogy a $\frac{\lambda(x,T)}{m^T}$ mennyiséget jól lehet közelíteni a $p(0 \to x, T)B$ szorzattal, ahol $p(0 \to x, T)$ annak a valószínűsége, hogy a 0 pontból kiinduló véletlen bolyongás a T időpontban az x pontba kerül, és B az elágazási folyamat viselkedésének limeszét leíró tételben szereplő határértékként megjelenő valószínűségi változó.

Kétfajta eredményt ismertet a könyv. Az egyik a rendszer globális viselkedéséről szól. Arra ad becslést, hogy milyen nagy a $\lambda(x,T)$ mennyiséget közelítő becslések hibáinak az összege, ha ezeket minden $x \in Z^d$ pontra összegezzük. A másik, lokális eredmény jobb becslést ad akkor, ha csak egy alkalmas kis tartományban összegezünk. Az eredmények pontos megfogalmazását elhagyom. A bizonyítással kapcsolatban is csak egy észrevételt teszek annak heurisztikus hátteréről. A bizonyításban fontos szerepet játszik egy olyan alkalmas segédmennyiség bevezetése és használata, amelyikben a véletlen hatások egy részét azok átlagával helyettesítjük.

Tekinti a könyv e problémának azt a változatát, amikor a 0 kiinduló időpontban minden rácspontban ül egy részecske, és azok, illetve azok utódai az előző modellhez hasonló módon viselkednek. Tekinti az ebben az esetben definiált $\Lambda(x,T)$ illetve $\Lambda(T) = \Lambda(0,T)$ valószínűségi változókat, amelyek azt mérik, hogy hány pont tartózkodik az x pontban a T időpontban, és iterált logaritmus tételt, illetve centrális határeloszlás tételt bizonyít be a $\Lambda(T)$ valószínűségi változókra. Ugyancsak szerepel a problémának az a változata, amelyikben egy kiinduló pont van, de az, illetve az utódai az R^d Euklideszi térben mozognak, és mozgásuk pályája Wiener folyamat. Ilyenkor természetesen egy mérhető A halmazba eső részecskék számát vizsgáljuk.

Eddig a könyv azon részéről írtam, amely olyan rácson való véletlen bolyongásokat tárgyalt, amelyet egy szuperkritikus elágazási folyamat résztvevői tesznek. Foglalkozik a könyv azzal az esettel is, amikor egy kritikus elágazási folyamat résztvevőinek a véletlen bolyongásait tekintjük. Ez sokkal nehezebb eset, itt sokkal összetettebb jelenségek lépnek fel. A kritikus elágazási folyamatokról, azaz arról az esetről, amikor az utódok számának várható értéke 1, szintén nagyon tartalmas tételek vannak, amelyeket a könyv ismertet, és felhasznál. Például ismert a jó aszimptotikája annak, hogy milyen valószínűséggel marad a rendszer életben a t időpontig, illetve, ha életben marad, akkor hány tagja van. Egy nagyon lényeges különbség a kritikus és szuperkritikus modell között az, hogy a kritikus esetben a csoport tagszámának a feltételes várható értéke, feltéve, hogy nem halt ki, a t időnek csak polinomiálisan, a szuperkritikus esetben pedig annak exponenciálisan növekvő függvénye. Ezért a kritikus esetben a korábbiaktól lényegesen eltérő eredmények érvényesek. Ezek tárgyalását elhagyom ebből az ismertetésből.

Az elágazási folyamatoknak egy érdekes általánosítása a multiple elágazási folyamat, amelyikben több különböző típusú egyed van, mindegyik egy egységnyi ideig él, és mielőtt meghal, mindegyik típusú egyedből szül valahányat, és a különböző típusú utódok száma véletlen. A könyv második részének utolsó témája ilyen modellek vizsgálatáról szól, de csak azt az esetet vizsgálja, amikor két különböző típus létezik. Vizsgálja azt a kérdést is, hogy mi történik akkor, ha a az egyes egyedek véletlen bolyongást végeznek, hasonlóan a korábban vizsgált modellek résztvevőihez, de a fő probléma ezen multiple elágazási folyamat viselkedésének a megértése. Az egy típust tartalmazó modellek vizsgálatában a szubkritikus, kritikus és szuperkritikus rendszerek fogalmának a bevezetése volt hasznos. Felmerül a kérdés, mi felel meg ezeknek a fogalmaknak az új rendszerekben.

Most is érdemes bevezetni a megfelelő várható értékeket. Jelölje 0 és 1 a két különböző típusú egyed indexét, és jelölje $m_{i,j}$, $i,j=0,1$ az i típusú egyed j típusú utódainak a várható értékét. Az

$$M=\begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} \end{pmatrix}$$

mátrix és annak M^t, $t=1,2,\dots$, hatványai fontos szerepet játszanak a vizsgálatokban. Ugyanis, ha $B(j,t)$-vel jelöljük a j típusú egyedek számát a t időpontban, akkor nem nehéz megmutatni, hogy ezek várható értékei megegyeznek az M^t mátrixok megfelelő sorösszegeivel. Sőt megfelelő feltételes várható értékek kiszámításával és a martingál konvergencia tétel alkalmazásával a $B(j,t)$, $t\to\infty$ értékek aszimptotikus viselkedésére is jó jellemzést kapunk. Figyelmes és alapos munka segítségével bebízonyíthatjuk az egy típusból álló rendszerekről szóló tételek megfelelőit.

Ez azt jelenti, hogy minket érdeklő problémák megoldásához az M^t mátrixok aszimptotikus viselkedését kell megérteni $t\to\infty$ esetén. Ez a viselkedés attól függ, hogy az M mátrix hány nullát tartalmaz, nulla-e a determinánsa, és a λ_1 nagyobb sajátértékére igaz-e, hogy $\lambda_1>0$. Sok különböző esetet kell végignézni a teljes megoldás érdekében, és ez a könyv elvégzi ezt a munkát.

A legérdekes eset az, amikor az M mátrixnak nincs nulla eleme, determinánsa nem nulla, és a nagyobb sajátértékére $\lambda_1>0$. Ebben az esetben a rendszer úgy viselkedik, mint a szuperkritikus modellek az egyetlen típust tartalmazó rendszerekben.

Végül megjegyzem, hogy ha ilyen rendszereket tekintünk, és az azokban résztvevő egyedek véletlen bolyongást végeznek, akkor a rendszer vizsgálatát elvégezhetjük ezen új eredmények és a régi módszerek alkalmazásával. Továbbá az eredmények is a korábbiakhoz hasonlóak.

Végül a könyv harmadik része egy olyan eredményt tartalmaz, amely hasonlóságot mutat a Strassen-féle iterált logaritmus tétellel. Olyan szuperkritikus elágazási folyamatokat tekint, amelyben a benne résztvevő egyedek mozgása Wiener folyamat. Tekintsük minden $T = 1, 2, \dots$ indexre az ebben az időpontban élő egyedeket és azt a Wiener folyamat pályát, amit ők az elődeikkel együtt bejártak. Vegyük mindegyik ilyen a $[0, T]$ intervallumon definiált $W_i(t)$ pályának a $[0, 1]$ intervallumon definiált $w_T(i, x) = \frac{1}{T} W_i(xT)$, $0 \le x \le 1$, standardizáltját. Definiáljuk az ezen normalizált Wiener folyamatok mindegyikét tartalmazó

$$w_T = \{w_T(1, x), w_T(2, x), \dots, w_T(B(T), x)\}$$

halmazt, ahol $B(T)$ az elágazási folyamat T időpontban létező tagjainak a számát jelöli. Így definiáltunk minden ω elemi eseményre egy a $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvényekből álló w_T, $T = 1, 2, \dots$, halmazsorozatot.

Ha adva van egy metrikus tér elemeit tartalmazó halmazok sorozata, akkor lehet természetes módon definiálni e halmazsorozat limesz szuperiorát és limesz inferiorát. Ha ez a kettő megegyezik, akkor beszélhetünk ennek a halmazsorozatnak a limeszéről. Jelen példában igaz az, hogy a w_T, $T = 1, 2, \dots$, halmazsorozatnak 1 valószínűséggel létezik limesze, és az megegyezik a $(2 \log m)^{1/2} \mathcal{S}$ halmazzal, ahol $m > 1$ a születések számának a várható értéke, és $\mathcal{S}$ a Strassen-féle iterált logaritmus tételben definiált, a normalizált trajektóriák torlódási pontjait tartalmazó halmaz, pontosabban, ha d-dimenziós Wiener folyamatokat tekintettünk, akkor annak azon d-dimenziós változatával, amelyik a d-dimenziós Wiener folyamatra érvényes Strassen-féle iterált logaritmus tételben jelenik meg. Az, hogy a normálásban megjelent a $\log m$ mennyiség természetes. Ez azzal függ össze, hogy a w_T halmaz $B(T)$ számosságának a nagyságrendje m^T nagy T számra.