

METAMATEK MUNKAFÜZET

Bevezető

A jelen feladatgyűjtemény több mint egy évtizeddel ezelőtt született, de az alap gondolatai ma is aktuálisak. Az elmúlt években újra elövtük, átdolgoztuk, és több általános iskolában is alkalmaztuk akciókutatás keretében. A pedagógusok és a tanulók visszajelzései, valamint a fejlesztések során szerzett tapasztalatok megerősítettek bennünket abban, hogy a szöveges feladatok megértésének és a problémamegoldó gondolkodásnak a fejlesztése ma is az egyik legfontosabb feladata a matematikaoktatásnak.

A feladatgyűjtemény nem kész recepteket kíván adni, hanem ötleteket, kipróbált feladatokat és olyan szemléletet közvetít, amelyben a tanulók gondolkodása, a problémák megértése és a különböző reprezentációk használata áll a középpontban. Meggyőződésünk, hogy a matematika nem pusztán szabályok és algoritmusok alkalmazása, hanem a gondolkodás fejlesztésének egyik leghatékonyabb eszköze.

Bízunk benne, hogy a feladatgyűjtemény hasznos segítséget nyújt majd a pedagógusok mindennapi munkájában. Ugyanakkor tudjuk, hogy minden osztály más, minden pedagógus másképpen tanít, és a feladatok feldolgozása során számos kérdés, ötlet vagy továbbfejlesztési lehetőség merülhet fel.

Az anyag használatában szívesen segítünk, örömmel adunk tanácsot, és válaszolunk a felmerülő kérdésekre. A feladatokkal, a használt eszközökkel vagy egyes feladatlapok elérésével kapcsolatban felmerülő kérdés vagy kérés esetén bátran keressenek a bereczkildiko@gmail.com e-mail címen.

Kívánjuk, hogy a feladatok feldolgozása sok közös gondolkodást, felfedezést és örömteli matematikai élményt hozzon pedagógusnak és tanulónak egyaránt.

Szöveges feladatok megértése

Csíkos Csaba – Szitányi Judit – Kelemen Rita

Előjáróban

Ugye egyetértünk abban, hogy a matematikai gondolkodás fejlesztése nemcsak az elmúlt évszázadokban, de napjainkban is az egyik legfontosabb iskolai fejlesztési feladat? Alighanem abban is egyetértünk, hogy a matematikai szöveges feladatok megoldásában szerzett jártasság alapvetően fontos kelléke a matematikai tudásnak. És alighanem azt is egyformán látjuk, hogy a szöveges feladatok megértése sok tanuló számára okoz nehézséget. Munkafüzetünk elsődleges feladata, hogy segítséget nyújtsunk a tanulóknak abban, hogy ne csak jól tudjanak megoldani szöveges feladatokat, hanem megértsék a megoldás lépéseit, és közben jobban megismerjék saját gondolkodási folyamataik működését. A Metamatek címben szereplő meta-előtag arra utal, hogy a gondolkodás magasabb szintű összetevői fontos szerepet játszanak a feladatmegoldás során. Milyen „egyszerű” is lenne, ha minden feladat esetében működne az a szabály, amelyet egyébként sok tanuló ténylegesen követ, mely szerint „keresd a feladat szövegében a számadatokat, kösd össze azokat a megfelelő művelettel, végezd el a műveletet, és megkapod a végeredményt”! A gondolkodás sokkal inkább olyan feladatokkal fejleszthető, amelyekben teret kap a feladatmegoldás tervezése, a megoldás folyamatának nyomon követése és az eredmény értékelése.

Célunk tehát az, hogy a feladatok megértését, és a feladatmegoldás folyamatának megismerését elősegítsük. Sokféle elképzelés lehetséges arra vonatkozóan, hogy milyen feladatok, milyen oktatási módszerek és milyen szemléltetési módszer alkalmasak ennek a célnak a megvalósítására. A munkafüzetben bemutatott feladatrendszer, a feladatokhoz fűzött útmutatás és a javasolt szemléltetési módszerek egy lehetséges fejlesztési utat jelölnek meg. Ez a fejlesztési út több szempontból egyedi és újszerű. Az egyediség és újszerűség önmagában is érték lehet, de ezen túl konkrétan a következő sajátosságait emeljük ki a feladatrendszerünknek:

- A megszokott tanmenetek alkalmazása mellett, osztálytermi keretek között felhasználható a program. A feladatrendszer bármelyik tankönyv mellett alkalmas oktatási segédanyagként.

- Nagy hangsúly kerül a programban a tanári és tanuló rajzok megértést elősegítő szerepére.

- A feladataink minden képességszinthez tartozó tanuló esetében felhasználhatók, jelentősebb fejlesztő hatást a gyöngébb és a közepes képességszintű tanulók esetén várhatunk.

- A feladatok a matematika tanulását a tanulói aktivitáson keresztül valósítják meg: ha nem is játszva, de rajzolva, beszélgetve, érvelve haladhat előre a tanuló a matematikai szöveges feladatok megértésében.

- Hazai és nemzetközi tudományos konferenciákon¹ vállaltuk a megmérettetést, és ezek alapján elmondható, hogy a feladatrendszerrel végzett pedagógiai kísérlet eredményesnek és hatékonynak bizonyult.

- Az alapelvek, amelyek szerint a feladatrendszert összeállítottuk, nemcsak 3. osztályban teszik lehetővé hasonló feladatrendszerek kidolgozását, hanem magasabb évfolyamokon is, így reményeink szerint egy sorozat első darabja készült most el.

- Ahogyan a címlapon is jeleztük, a munkafüzetet szeretettel és bizalommal ajánljuk a 3. osztályos tanulók szüleinek figyelmébe. Azt reméljük, a szülő értő módon tud segíteni gyermekének a szöveges feladatok megoldásában, ha elolvassa a feladatokhoz fűzött magyarázatainkat.

¹ A VIII. Országos Neveléstudományi Konferencián (2008. nov. 13-15.) szimpózium keretében mutattuk be a fejlesztő programot, az európai oktatáskutatók legjelentősebb rendezvényén, az EARLI (European Association for Research on Learning and Instruction) 2009-es, amszterdami konferenciáján pedig a nemzetközi tudományos közösség számára mutatjuk be eredményeinket.

A szerzők köszönetet mondanak a Kiadónak, amiért föl vállalta ezt a kezdeményezést, és a közoktatási intézményekhez eljuttatott tájékoztatóiban és katalógusaiban széles körben megismertette a kiadványt.

Köszönettel tartozunk azoknak a budapesti iskoláknak és a tanító kollégáknak, akik 2008 tavaszán részt vettek a feladatrendszer kísérleti kipróbálásában.

A fejlesztő kísérlet megvalósítását és a hozzá kapcsolódó kutatómunkát az OTKA 63360. sz. pályázatában elnyert támogatás tette lehetővé.

Szeged – Budapest, 2009. február

A szerzők

Tartalom

<u>Mi végre vannak szöveges feladatok a matematika tantervekben?</u>	5
<u>Mi zajlik a tanuló fejében a feladatmegoldás során?</u>	10
<u>A kísérleti programunk kutatási előzményei</u>	13
<u>Munkafüzetünk feladatainak jellemzői</u>	14
<u>Metakognícóra alapozott fejlesztés a matematika területén</u>	14
<u>A matematikai gondolkodás fejlesztésének sajátosságai 3. osztályban</u>	15
<u>Képek a fejünkben a matematikai feladatmegoldás során</u>	15
<u>A feladatmegoldás során készülő rajzok típusai</u>	16
<u>Kedves Szülők!</u>	16
<u>A feladatrendszer szerkezete</u>	18
<u>Fejlesztő feladataink és a tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei</u>	19
<u>1. tanítási egység</u>	19
<u>2. tanítási egység</u>	20
<u>3. tanítási egység</u>	20
<u>4. tanítási egység</u>	21
<u>5. tanítási egység</u>	21
<u>6. tanítási egység</u>	22
<u>7. tanítási egység</u>	22
<u>8. tanítási egység</u>	23
<u>9. tanítási egység</u>	24
<u>10. tanítási egység</u>	25
<u>11. tanítási egység</u>	25
<u>12. tanítási egység</u>	26
<u>13. tanítási egység</u>	27
<u>14. tanítási egység</u>	28
<u>15. tanítási egység</u>	29
<u>16. tanítási egység</u>	29
<u>17. tanítási egység</u>	30
<u>18. tanítási egység</u>	31
<u>19. tanítási egység</u>	32
<u>20. tanítási egység</u>	32
<u>Feladatok kiemelhető, fénymásolható lapokon</u>	33
<u>A szemléltetéshez javasolt írásvetítő-fóliák anyaga</u>	34

Mi végre vannak szöveges feladatok a matematika tantervekben?

A lehető legrövidebb válasz: megszokásból. Egy kissé hosszabb válasz alapján: hogy legyen mivel nyüstölni a diákokat. Még hosszabb választ igyekezvén találni, röviden áttekintjük, hogy milyen szerepe lehet a matematikai szöveges feladatoknak az iskolai munkában. Ezután történelmi távlatokból közelítünk a kérdéshez, és arra keresünk választ, hogy az elmúlt évezredek matematikatanításában hogyan alakult a szöveges feladatok szerepköre. Nem titkoljuk, hogy azért tartjuk szükségesnek a történelmi múltba is visszanyúló bevezetést, mert úgy érezzük, sok pedagógus és sok laikus szülő számára a szöveges feladatok elsősorban a számtani műveletek begyakorlására, a számtani műveletek nehezebb terepen történő használatának gyakorlására szolgáló képződmények. Előrebocsátjuk, hogy szerintünk a gondolkodás eredményes fejlesztéséhez az a szemléletmód tűnik meggyőzőbbnek, amely szerint a szöveges feladatokat a valóság jelenségeire építő problémáknak tekintjük, és e problémáknak a megoldása során – természetyszerűleg – gyakran alkalmazunk számtani műveleteket is. Az itt következő gondolatokat a Tanítás-Tanulás című lap cikksorozatában 2008-ban megjelent írásokban² már közöltük.

Két, egymástól alapvetően különböző elképzelés figyelhető meg a szöveges feladatok tanításának célját illetően. Az első megközelítésmód szerint a számolási készség tanításának egy adott szakaszában az alpműveleteket „szövegbe öltöztetjük”. Ilyen módon a szöveges feladatok a számolási készség fejlesztésének szolgálatában állnak, de megjelenik az a törekvés, hogy az unalmas, egysíkú műveletvégzést színesítsük, és megmutassuk az alpműveletek gyakorlásának hasznosságát. Több száz elvégzett alpműveleti számolós feladatot követően az összeadandók vagy a kivonandók játékautók vagy üveggolyók darabszámaként vagy pénzüsszégként jelennek meg a tanulók előtt.

Egy másik megközelítésmód szerint a szöveges feladatok a hétköznapi életben felbukkanó matematikai problémák kikristályosodott formáját jelentik, amelyek megoldása során szükségszerűen alkalmazzuk a számolási készség műveleteit. A tanulók számára releváns feladatot jelenthet két doboz tartalmának összeöntése, a vásárlás után megmaradó pénzüsszeg kiszámítása vagy akár életkorok, testmagasságok közötti különbség kiszámítása: a szöveges feladatok elvileg ezeknek a hétköznapi helyzeteknek a leírását szolgálhatják, megfelelve a matematikaórák formai követelményeinek és játékszabályainak.

Mindkét megközelítésmód alkalmas arra, hogy azzal alátámasszuk a matematikai szöveges feladatok iskolai alkalmazásának jelentőségét. Ugyanakkor mindkét megközelítésmód figyelmen kívül hagyhatja, hogy ténylegesen mi történik a tanuló elméjében: hogyan reprezentálódik egy matematikai probléma, milyen gondolkodási lépések szükségesek a megoldás megszületéséhez.

A matematikai műveletek felől közelítve a szöveges feladatokhoz, azokat mintegy szövegbe beöltöztetve, könnyen azzal a problémával szembesülünk, amelyre már Freudenthal felhívta a figyelmünket. Arról van szó, hogy amikor a feladatot kitűző szándéka csupán annyi, hogy az unalmas számolási gyakorlatokat szöveges feladatokkal tegye színesebbé, gyakran életszerűtlen, a valóságos viszonyokat ténylegesen átgondolva már megoldhatatlannak számító problémához jutunk.

Freudenthal példájában a $26+10$ összeadás a következő szövegbe öltöztetve jelenik meg: „A hentes 10 kg húst rendelt a meglévő 26 kg hús mellé. Hány kiló hús van nála most?” Freudenthal szerint akár olyan válasz is születhet, amely szerint nincs egyértelmű megoldás, hiszen amíg

² Csíkos Csaba (2008): A szöveges feladatok szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében (I. rész) A matematikai szöveges feladatok: szövegbe öltöztetett műveletek vagy a valóság matematikai modelljei? *Tanítás-Tanulás*, 6, 1. sz. 26-27.

Csíkos Csaba (2008): A szöveges feladatok szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében (II. rész) A matematikai szöveges feladatok kultúrtörténeti szempontból. *Tanítás-Tanulás*, 6, 3. sz., 28-29.

megérkezik a megrendelt 10 kg hús, elkélhet valamennyi a meglévő 26 kg-ból. Érezhetjük a példát szörszálhasogatónak, hiszen ebből kiindulva szinte bármelyik szöveges feladat tekinthető rosszul definiáltnak. A következő feladat egy olyan feladatsorból származik (szerzői: Verschaffel, De Corte és Lasure), amelyet számos országban kipróbáltak már nagymintás felmérés során: „Egy boltos két ládában tartja az almát. Az első ládában 60 darab, a másodikban 90 darab alma van. Az összes almát beleteszi egy új, nagyobb ládába. Hány darab alma lesz ebben az új ládában?” A feladat kitűzői szerint itt a $60+90$ összeadás szövegbe öltöztetéséről van szó. A figyelmes szemlélő azonban észreveheti, hogy a $60+90$ csak abban az esetben adja a feladat megoldását, ha az új, nagyobb láda üres volt, mielőtt a két láda tartalmát a boltos beleöntötte volna. Nyilvánvaló, hogy a feladat szövege eléggé részletezővé, szájbarágóssá válna, ha minden ilyen kétértelműséget kiküszöbölnénk belőle.

Világos tehát, hogy amikor egy (vagy több) matematikai alpművelet elvégzését szeretnénk szövegbe öltöztetve, szöveges feladatként megfogalmazni, akkor a feladatok gördülékeny megfogalmazásával együtt jár, hogy néhány dolgot elhallgatunk, és természetesnek vesszünk. Az elhallgatott adatok, tények értelmezésének egy kimondatlan, rejtett szabályrendszere alakul ki, amelyet Brousseau „didaktikai egyezmény”-nek nevez.

A tanár-diák interakciók, az osztálytermi munka során számos kimondatlan szabályszerűséget sajátítunk el (nem csak a tanulók, hanem a pedagógus is), amelyek lehetővé teszik, hogy az alpműveletek elvégzésének szöveges feladatok formájában történő gyakorlása során mellőzzük a körülményeskedő megfogalmazásokat. Ilyen alapszabály például az, hogy a tanár által a tanulók elé tett feladat értelmes és megoldható. Ennek következménye pedig, hogy a tanulók által, a játékszabályok betartásával adott válaszokat helyesnek fogadja el a pedagógus. A „didaktikai egyezmény” létezése és betartása több negatív következménnyel jár.

Az egyik negatív következmény, hogy a szöveges feladatok megoldásának helyi, lokális (és ennek megfelelő értékű) kultúrája alakulhat ki. Helyettesítő szaktanár gyakran megkaphatja a tanulóktól a megoldás menetére vagy módszerére vonatkozóan a „nem így szoktuk” és ehhez hasonló véleményeket. Egy másik negatív következmény, hogy olyan tanulói meggyőződések alakulnak ki már alsó tagozatos korban a matematikai szöveges feladatok megoldhatóságával kapcsolatban, amelyek nehezítik vagy lehetetlenné teszik a későbbi, összetettebb szöveges problémák megoldását. (Erről a cikksorozatban később részletesen szólnunk majd.)

A szöveges feladatok másik lehetséges szerepe a valóság matematikai viszonyainak megfogalmazása, modellezése. Ebben az esetben nem az alpműveletek drillszerű gyakoroltatásának kiváltásáról van szó, hanem az életszerű problémamegoldás megjelenéséről. Legtípikusabb példa az életszerű szövegesfeladat-megoldó helyzetre az, amikor európai kutatók alacsony iskolázottságú, utcai árusításból élő gyerekek körében vizsgáldtak. A kutató kérdésére, hogy mennyibe kerül egy kókuszdió, válaszként 35-öt kapott [cruzeiro-ban értve az összeget]. Amikor a következő kérdésként 10 kókuszdió árát kérdezte a kutató, a gyermek hangosan gondolkodni kezdett: „Három az 105-be kerül, még hárommal együtt 210, és még négy kell. Ez 315... Szerintem 350 lesz.” Az utcai árus számára életszerű, valóságos matematikai viszonyok modellezését jelentette a válaszadás, és ennek megfelelően, legjobb tudása szerinti lépéseket követett. Az iskolapadban ülő hasonló korú társai a tízzel történő szorzást egy nulla hozzáírásával tanulják és gyakorolják, míg életszerű helyzetben a tíz kókuszdió árára vonatkozó kérdésre egy egészen más gondolatmenet mentén született meg a válasz.

Jellemző az életszerű matematikai problémákra, hogy gyakran rosszul definiáltnak tűnnek. Ha például iskolán kívüli kontextusban megkérdezzük valakitől, hogy melyik évben született, ebből még általában nem tudjuk kiszámolni, hogy hány éves az illető, hanem szükséges a születés hónapját, esetleg napját is ismerni. Iskolai feladatsorban ugyanakkor gond nélkül megoldjuk az ilyen életkoros feladatokat egyetlen kivonás segítségével, amelyben csak két évszám szerepel. Ha azt a feladatot kellene megoldanunk, hogy tíz szurkoló hány

személygépkocsival tud elutazni egy mérkőzés helyszínére, akkor számos kérdést tennénk fel az autók befogadóképességéről, vagy arról, hogy valamelyik szurkoló vezeti-e az autót. Ezzel szemben iskolai feladatként hezitálás nélkül elővonnánk a $10:5=2$ osztást, és adódna a végeredmény.

Mire valók tehát a matematikai szöveges feladatok? Vajon találkozik-e egymással a két megközelítésmód, vagyis lehetnek-e a valóságot modellező, életszerű feladatok egyúttal a számolási készséget fejlesztő gyakorlatok is? Avagy megfordítva: az alpműveletek végzésének gyakorlását szolgáló szöveges feladatokkal kifejezhető-e életszerű, valóságos matematikai problémák?

A jelenlegi alsó tagozatos tankönyvekben, feladatgyűjteményekben erősebbnek tűnik az az álláspont, amely szerint a szöveges feladatok a műveletvégzés gyakorlására szolgálnak, és emellett egyfajta feladatmegoldó stratégia elsajátítását segítik elő. Általában a tanítók külön pontot adnak arra a felmérő dolgozatokban, hogy legyenek rendesen kigyűjtve az adatok, legyen kijelölve az elvégzendő művelet, és a végén legyen aláhúzva a válasz, amelyet teljes magyar mondatban is meg kell fogalmazni. Vajon a tíz kókuszdió árát helyesen meghatározó utcai árus hány pontot szerezne?

A problémát abban látom, hogy a szöveges feladatoknak ez a szerepköre nem fejleszti megfelelően a tanulói gondolkodást. Sok-sok szöveges feladat uniformizált megoldása (és itt a hangsúlyt az uniformizált megoldásmeneten van) gátolja a gondolkodási stratégiák rugalmas fejlődését, és hátráltatja, sőt, visszaszorítja a tanuló saját gondolkodási folyamatainak megismerését. Automatikussá válnak olyan folyamatok is, amelyek esetében a tudatos lépések megmaradása fontos lenne. Ha a feladat szövegében fölbukkan két számadat, és megjelenik például a „kisebb” szó, akkor a legtöbb tanuló számára a probléma tényleges modellezése nélkül is kézenfekvő, hogy a szereplő két számadat közül a nagyobbikból ki kell vonni a kisebbet, és máris megkaptuk a végeredményt. Hiszen a feladatok túlnyomó többsége esetén helyes eredményt kapnak ezzel a módszerrel, ha pedig nem, akkor szinte a pedagógusnak illik bocsánatot kérnie, hogy „khmmm... ez egy becsapós feladat volt”.

Nem kétséges, hogy az alpműveletek elvégzésében magabiztosságot kell szerezniük a tanulóknak az alsó tagozat második felére. Nagy József kifejezésével élve: a felnőtt szakember tempóját és hibátlanságát (az antropológiai optimumot) kell megközelítenie minden tanulónak. Nem kétséges, hogy ennek elérése kitarást igénylő munka, hiszen a számolási készségnek automatizálnia kell. A készség fejlődését és fejlesztését azonban – meggyőződésem szerint – nem a szövegbe öltöztetett műveleteket kifejező szöveges feladatok szolgálják legjobban, hanem azok, amelyek a valóság modellezéséből indulnak ki, és amelyek megoldása során értő és értelmes módon tervezhetik, nyomon követhetik és ellenőrizhetik a tanulók a saját számolási készségük működését.

. Arra a következtetésre jutottunk tehát – és ezt a későbbiekben empirikus adatokkal is igyekszünk megtámogatni – hogy elsősorban a valóság matematikai modellezését elősegítő szöveges feladatok alkalmasak a gondolkodás fejlesztésére. Most rövid történelmi sétát teszünk azt kutatva, hogy milyen szerepet tölthettek be a szöveges feladatok a múltbeli matematikatanításban. Adataink elsősorban Verschaffel, Greer és De Corte monográfiájából és saját dokumentumelemzéseinkből származnak.

Az elmúlt évszázadokban a matematikai szöveges feladatok alkalmazásának az volt leggyakrabban a kimondott célja, hogy valamilyen gyakorlati tudásra tegyenek szert segítségükkel a tanulók: kereskedelem, navigáció, földmérés. Az első nyomtatott könyv, amely jelentős részben szöveges feladatokat tartalmazott, az 1478-ban Trevisóban megjelent Arte dell'Abaco (az angol szakirodalomban: „Trevisoi Aritmetika”) volt. Megjegyezzük, korábbi évszázadokból is számos szöveges feladat fennmaradt, de ez volt az első nyomtatott mű, amely a konkrét történelmi helyzetben a Velencei Köztársaságban jelentős társadalmi igényt elégített ki. Önálló tanulásra is alkalmas módon az aritmetika alapjait tartalmazta, a példák pedig a

kereskedelmi tranzakciók világából származtak. Megjelent a könyvben például az úgynevezett hármasszabály alkalmazása, amelynek speciális esete az egyenes arányosságnál felírt külső és belső tagok szorzatának egyenlőségére vonatkozó tétel. Kevés hangsúlyt fektet ugyanakkor ez a kézirat a miért?-re, vagyis annak magyarázatára, hogy az egyes számolási és feladatmegoldó eljárások miért úgy helyesek, ahogyan azok benne szerepelnek. Megjegyzendő, hogy abban az időben a matematika tudományának igazságai általában a körülöttünk lévő világ igazságaiként tündtek föl; példa erre az euklideszi geometria, amely a térbeli jelenségek pontos leírásaként szerepelt a 19. századig.

A szöveges feladatok azonban nem csak egy konkrét szakterületre felkészítés céljából jelentek meg az oktatásban, hanem évszázadok óta megfigyelhető a gondolkodás fejlesztésének igénye is.

„Hét ember 8 íjat készít el 9 nap alatt. Hány napig tart 225 embernek elkészítenie 10 000 íjat?” – ez a feladat egy 13. századi kínai kéziratból, a Shu-shu Chiu-changból származik. Nyilvánvaló, hogy a feladat kitűzése és megoldása nem egy konkrét szakmára felkészítés eszköze, hanem a matematikai gondolkodás fejlesztésének szándékával készült. Még hátrébb haladva az időben: az ókori Babilóniában a szöveges feladatok tartalma és az azokban szereplő adatok egy része valósághű és kézzelfogható volt, azonban például a munkatempóra vonatkozó adatoknál már különvált a matematikai szöveges feladatok világa és a fizikai-társadalmi valóság.

Szintén nem egy konkrét foglalkozás művelésére készített föl a 12. századi indiai Lilavati. A számolási technikák elsajátítására szolgáló szöveges feladatok között szerepelt a következő: „Ha egy 16 éves rabszolganő 32 *niskába* kerül, mennyibe kerül egy 20 éves?” A feladat megoldásaként 25 és $\frac{3}{4}$ adódik, ami nyilván egy fordított arányosságot feltételező számolás végeredménye. Egészen pontosan 25,6 jön ki, de nyilván a ténylegesen használt váltópénz is befolyásolja az eredményt. [Egy *niskát* háromféleképpen lehetett aprópénzre váltani, és a váltószám lehetett 130, 160 vagy 800.] Láthatjuk tehát, hogy a matematikai szöveges feladatoknak az a szerepköre, amelyet az elmúlt alkalommal a matematikai műveletek szövegbe öltöztetéseként aposztrofáltunk, sok száz éves múltra tekint vissza.

Még további két jelentős szerepköre van – történelmi távlatból nézve – a matematikai szöveges feladatoknak. Az egyik a „rekreációs” szerep, vagyis a rejtvény jellegű, gyakran becsapósnak vagy csattanósnak számító feladatok alkalmazása. Végül a matematikai szöveges feladatok – elsősorban a szövegükben megjelenített tartalom miatt – a politikai-világnézeti nevelés eszközei is lehetnek.

A meghökkentő, váratlan fordulatot rejtő feladatoknak is több ezer éves története van. Az i.e. 2000 körül keletkezett Rhind papirusz egyik feladata például beletartozik ebbe a körbe: „Van hét ház; mindegyik házban van hét macska; mindegyik macska megöl hét egeret; mindegyik eger megevett hét kalász gabonát [más forrás szerint: hét szem árpát]; mindegyik kalászból hét *hekatnyi* gabona termett volna. Mennyi az itt felsorolt dolgok összege?”

A valóságos viszonyoktól elrugaszzkodó feladatszövegek inspirálták Gustav Flaubert ironikus feladványát, amelyet matematikát tanuló testvéréhez intézett 1843-ban: „Mivel geometriát és trigonometriát tanulsz, egy feladatot adok neked. Egy hajó szeli át az óceánt. Bostonból indult, és gyapjút szállít, ami 200 tonna. Le Havre-be megy. A főárboc eltörött, egy hajósinas áll a fedélzeten, összesen 12 utas van a hajón, a szél kelet-északkeleti irányból fúj, az óra pedig délután negyed négyet mutat. Május van. Hány éves a kapitány?” Az azóta eltelt bő másfél évszázadban sok hasonló, hosszabb-rövidebb (de inkább rövidebb) becsapós feladvány született, amelyek matematikai tartalma és hasznossága kérdéseket vet föl, de formai szempontból nagyon hasonlóak azokhoz a babiloni vagy indiai feladatokhoz, amelyekben már elvált egymástól a szöveges feladatok világa és a tényleges, valósághű számítások világa.

A matematikai szöveges feladatok is áldozatul estek bizonyos történelmi időszakban annak a törekvésnek, hogy az oktatási rendszer, más funkcióit akár háttérbe is szorítva emiatt,

maximálisan eleget tegyen a politikai rendszer elvárásainak a politikai-világnézeti nevelés terén. Nyilván elsősorban a történelemre, az alsó tagozatos olvasmányokra, a kötelező olvasmányokra hárult a főszerep ezen a téren, de a matematikai szöveges feladatokban is megjelentek a tévesek, a háztáji kacsatenyésztők, a kommunista szombatok. Egy 1997-ben végzett nagymintás szegedi vizsgálat eredményeit Csapó Benő és Vidákovich Tibor publikálták a Közoktatás-kutatások kötetben; ebben 25 évvel korábban, Nagy József kutatásában kipróbált alsó tagozatos szöveges feladatokból állítottunk össze teszteket, és az eredeti 384 feladat között mindössze 100 olyat találtunk, amelyek megfelelő volt a bő tíz évvel ezelőtti tanulógeneráció számára. A legtöbb probléma a már említett politikai-világnézeti befolyásoltság mellett az árák, a mértékegységek megváltozásából adódott. [Például: „Gabiék örse 1 q papír gyűjtését vállalta. 47 kg-nál tartanak. Mennyit kell még gyűjteniük?”]

Rövid történelmi-történeti sétánk végén azt állapíthatjuk meg, hogy a matematikai szöveges feladatoknak négy fő funkciója volt az évszázadok során, és ezek közül kettőt már előző írásunkban is megjelöltünk mint a feladatok elemzésének megközelítési módjait. (1) Matematikai eljárások szövegbe öltöztetése, akár azon az áron is, hogy nem valóságűek, vagy kiegészítésre szorulnak az adatok. Sok száz éve jelen van a matematikai gondolkodás fejlesztésének igénye is, amelyet ilyen feladatokkal véltek megvalósíthatónak. (2) Valóságű feladatok megoldása, elsősorban valamilyen szakma művelésére felkészítés céljával. (3) Szórakoztatás, rejtvény-jelleg és (4) politikai-világnézeti nevelés.

A felsorolt négy pont közül a politikai-világnézeti nevelést nem szeretnénk érvényesíteni a szöveges feladatok típusainak meghatározásában. Nem azért, mert ma nem érhető tetten az iskolai feladatokban a „korszellem”, vagy ahogyan a tantervelmélet egyik atyja, Tyler mondaná, a mai kor filozófiája. Például a politikailag korrekt nyelvhasználat fokozatosan elérte az iskolai tankönyvek és feladatok szövegeit is. Óvatos megfogalmazás jellemző a feladatokban szereplő tevékenységekkel, tárgyakkal, sőt, személynevekkel kapcsolatban is.

A mai kor hatását azonban két részre kell bontanunk. Vannak egyrészt a feladatokban szereplő dolgok, amelyek lehetnek gőzgépek, autók, helikopterek, ahogyan éppen a társadalom változik. A matematikai tartalmat kevésbé érinti, hogy Laciék otthon kiskacsákat tenyésztenek, vagy pedig egy kertészetben rózsákat nevelnek; nagyjából ugyanazzal a matematikai tartalommal alkotható feladat ezekre a témákra. Az adott kor hatásrendszerének másik része ugyanakkor feloldható az (1)-(3) pontokban. Hogy mely műveletek elsajátítását várjuk el, hogy a szakképzésben miképp vezetjük be pl. az asztalosipari matematikai számításokat vagy tiltjuk, túrjuk, esetleg támogatjuk a rejtvény-jellegű, szórakoztató feladatok megjelenését az alsó tagozatos matematikaórán, részben oktatáspolitikai kérdés. A neveléstudomány, azon belül a matematikadidaktika feladata feltárni, hogy milyen típusú feladatok alkalmasak leginkább az értelem kiművelésére, a matematikai gondolkodás fejlesztésére.

A gondolkodás fejlesztésére használt matematikai szöveges feladatok típusait keresve az imént megállapított szempontok jelentenek fogódzót. (1) A feladat megoldásában szereplő matematikai művelet szerint egyszerű (egy alpművelettel megoldható) és összetett feladatokról szól Nyikityin 1952-ben lefordított, sokáig meghatározó műve. A tanítóképzésben ma elterjedten használt C. Neményi – Szendrei jegyzetben a műveletek száma mellett megjelennek a gondolkodó ember fejében lezajló folyamatok szerint létrejövő további szempontok is. Így például (2) a feladatról készített matematikai modellek, (3) a megoldások száma (és egyáltalán: a megoldhatóság), (4) a feladat megszövegezésének és az elvégzendő matematikai műveleteknek a viszonya. Ez utóbbi jelenség szemléltetésére ismét azt az – előző alkalommal is említett – példát hozzuk, amikor az elvégzendő művelet összeadás, ám a feladat szövegében a „kevesebb” szó szerepel. (Például: Karcsinak 10 üveggolyója van, öttel kevesebb, mint Évinek. Hány üveggolyója van Évinek?) Kísérletekkel igazolták bő egy évtizede, hogy a jó feladatmegoldók az ilyen szöveg elolvasása közben a „kevesebb” szónál lelassítanak, vagy

éppen újraolvassák azt. Így érkeztünk el a következő problémánkhoz: Milyen gondolkodási folyamatok zajlanak az elmében a matematikai szöveges feladatok megoldása során?

Mi zajlik a tanuló fejében a feladatmegoldás során?

Amikor arra a kérdésre keresünk választ, hogy milyen pszichikus folyamatok zajlanak az elmében, miközben például egy matematikai szöveges feladatot oldunk meg, sokféle megközelítésmód közül választhatunk. A különféle megközelítésmódok különféle tudományágak módszereit igénylik, és nagyon nehéz kérdés, hogy ezek közül melyiket tartjuk pedagógiai szempontból érvényesnek.

Két olyan megközelítésmód lehetséges, amelyek hasznos tudással látják el az emberiséget, de nem nyújtják a problémamegoldás folyamatának egy átfogó, pedagógiai szempontú modelljét. Az egyik lehetőség, hogy az agykutatás eredményeit hívjuk segítségül. Ebben a megközelítésmódban ott rejlik a feltételezés, hogy minden pszichikus folyamatnak megtalálható az agyi megfelelője. A másik szélsőséges megközelítésmód pedig az, hogy a feladatmegoldó által papírra vetett vagy szavakban elmondott választ tekintjük a belső gondolkodási folyamatok megfelelőjének.

Az agykutatás eredményei sok szálon erősítették az elmúlt évtizedekben a matematikai gondolkodás kutatását is. Itt most azt az eredményt emeljük ki, miszerint a számokkal végzett műveletek három, egymástól lényegesen különböző agyi területet aktivizálnak. Amikor ugyanis elolvassuk egy adott számadatot a feladat szövegében, legyen ez mondjuk a 7, egyszerre három dolog aktivizálódik agyunkban és elménkben: (1) a számjegy képe, (2) a szám elnevezése és (3) a számhoz tartozó mennyiségnek valamilyen képe vagy fogalma. Az első két összetevő nem szorul magyarázatra, hiszen a kisiskoláskornak egyik feladata stabil kapcsolatot létesíteni a számok alakja és neve között. A harmadik összetevő kissé rejtélyesnek tűnik, hiszen ha feltételezzük, hogy kisebb számok esetén még köröket vagy pálcikákat tudunk magunk elé képzelni, azt nem gondolhatjuk, hogy minden egyes nagyobb számhoz is önálló, egyenként leszámítható részekből fölépülő kép tartozik.

A kisebb számok esetében könnyen megérthetjük a három alkotórész fontosságát, hiszen egészen kicsi gyermekkorától a beszédtanulás részét jelenti a tőszámnevek és sorszámnevek tanulása. A „kettő” mint számnév például már kétéves korban megfelelően használható, amikor a testrészek nevét mondják a gyerekek, de a „2” számjegy ekkor még általában nem ismert előttük. Ebben az esetben tehát a (2)-es és (3)-as összetevő korai egybefűződését láthatjuk.

Azokat a számokat, amelyekhez nem tudunk olyan képet kapcsolni, amely egyenként megszámlálható elemekből áll, már óvodás kortól a mentális számegyenesen helyezzük el. A mentális számegyenes egy olyan kép, amely fejünkben megjelenik, amikor számokat, mennyiségeket vagy ezek viszonyait próbáljuk nagyság szerint elhelyezni. Bonyolult kísérletekkel, például a szemmozgás vizsgálatával sikerült kimutatni, hogy általános iskola 3. osztályára a százás számkörben eléggé pontos mentális számegyenes alakul ki a tanulóknál. Ez a számegyenes ekkor már lineáris, tehát a beosztása megfelel annak, ahogyan az iskolai füzetben a számegyenest rajzoljuk. (A mentális számegyenes kezdetben logaritmikus beosztású, tehát a vízszintesen meglévő távolságok inkább nagyságrendi viszonyokat fejeznek ki.) Az agykutatásnak itt említett eredményeit a hármaskód-elmélet néven ismerjük, és elsősorban *Dehaene* nevéhez köthető kifejlesztése.

Egy másik megközelítésmód, amely a feladatmegoldás folyamatait igyekszik föltárni: a feladatmegoldó által a feladatmegoldás folyamatáról nyújtott beszámoló. Ezt a megközelítésmódot azért kell óvatosan kezelnünk, mert már *Descartes* is arról tudósított, hogy a leírt matematikai eljárások gyakran nem a gondolkodás folyamatait követik. *Descartes* a régi

görög geometerekről írja, hogy az egyik bizonyítási módot „mint valami titkot” elkerülték írásaikban. A matematika által előírt normáknak megfelelés ma is befolyásolja, hogy mit és hogyan írunk le a feladatmegoldás folyamatából, és ez rendjén való.

A tanulókkal készített interjúk és a feladatmegoldás folyamatáról készített videofelvételek révén olyan világ tárult ki a kutatók előtt az utóbbi húsz évben, amely számos érdekes eredményt hozott. A tanulókkal készített interjúk során olyan meggyőződések kerültek napvilágra, mint például:

- Minden feladatnak egy „helyes” megoldása van.
- Használd fel a feladat minden számadatát a megoldáshoz!
- Fogadjuk el, hogy minden feladat, amit a tanár ad vagy a tankönyvben van, értelmes!

(Reusser és Stebler kutatás 13 éves tanulók körében)

A feladatmegoldás során készített videofelvétel utólagos elemzése pedig arra nyújt lehetőséget, hogy egy idővonalon elhelyezzük a megoldás fázisait. Így tett Schoenfeld 1987-ben egyetemisták körében, majd Csíkos, Kelemen és Steklács alkalmazta a módszert 5. osztályosok tanulókkal. Ez utóbbi kutatásban a tanulókat arra kértük, hogy feladatmegoldás közben végig folyamatosan hangosan beszéljenek, egészen pontosan azt mondják el, amire éppen gondolnak. A hangosan gondolkodtatás mint módszer megfelelő szókincs esetén elég jól visszaadja a gondolkodási folyamatok egymásutánját és kapcsolatait, ám mégis azt érezzük, hogy sok lényeges lépés olyan gyorsan végrehajtódik fejünkben, hogy sem az adott folyamatban, sem utólag nem tudunk róla beszámolni.

Olyan modellt keresünk tehát a fejünkben zajló feladatmegoldás leírására, amely épít a kognitív pszichológia eredményeire, figyelembe veszi a matematikatudomány sajátos szabályszerűségeit, és mindemellett alkalmas arra, hogy fejlesztő program épüljön rá. Három mérföldkövet azonosítottunk az elmúlt három évtized szakirodalmában, amelyek egy korszerű modell felé vezettek.

Kintsch és Greeno modellje megpróbálta számítógéppel programozhatóvá tenni egyszerű, egy művelettel megoldható szöveges feladatok megoldását. Az ilyen törekvések sikerét az jelzi, ha a számítógépbe betáplált lépések alapján adódó megoldottsági arány és a szükséges idő megfelel annak, amit emberek között tapasztalunk. Az egyik legegyszerűbb példa:

Jóskának három üveggolyója van.

Tominak öt üveggolyója van.

Kettőjüknek együtt hány üveggolyója van?

A modell szerint a megoldás több lépésben zajlik – annak ellenére, hogy olvasóink valószínűleg már az elolvasás közben, egy szempillantás alatt megoldották a feladatot.

1. lépés: A *“Jóskának három üveggolyója van”* állítás egy háromelemű halmazt generál a rövidtávú memóriában.
2. lépés: A *“Tominak öt üveggolyója van”* állítás a rövidtávú memóriából kiszorítja az előző háromelemű halmazt, és egy öteleművel helyettesíti.
3. lépés: A kérdés létrehoz egy harmadik halmazt, amelybe majd kettőjük összes üveggolyója tartozik, és ugyanakkor a harmadik halmazhoz tartozóan egy stratégia indul el, amely a két részhalmazt kéri, amiből majd a harmadik összeáll.
4. lépés: A Tomihoz tartozó halmaz még a rövidtávú memóriában van, a Jóskához tartozót pedig az epizodikus memóriából kell előhívni, hogy összeálljon a két részhalmazból a kérdéses halmaz.

Szinte rémisztő azt látnunk, hogy a legegyszerűbb kis szöveges feladat megoldása is milyen sok lépésből állna – ha a leírásnak ilyen elemi szintjére lenne igényünk.

A modell elvileg a bonyolultabb feladatok során szükséges sok-sok lépést is képes kezelni, és feltárni a hibázás lehetőségeit. Két probléma van ugyanakkor vele: egyrészt a valóságban a feladatok szövegében szereplő tárgyak gyakran befolyásolják a megoldottság szintjét, vagyis sok tanuló számára nem mindegy, hogy üveggolyók vagy mezőgazdasági természetátlagok szerepelnek egy feladat szövegében. Másrészt pedig a modell egy automatikusan, egymás utáni lépésekben lefutó folyamatot jelöl, amelyből kimarad a tervezés, és kimarad a feladatmegoldás közbeni elágazások lehetősége.

Mayer és Hegarty munkásságának egyik legjelentősebb eredménye a szöveges feladatok megoldásának két stratégiájához köthető: megértésen alapuló vagy közvetlen számolással történő. Attól függően, hogy a feladat tényleges megértése mellett történik a számolás elvégzése, avagy csupán mechanikusan, felületesen végzett számolással, sok esetben lényegesen más eredmény születik. Egyszerű, egy művelettel megoldható feladatok esetében a mechanikus (az ő kifejezésükkel: direkt translációs) stratégia azt jelenti, hogy a szövegben található számadatok és kulcsszó alapján történik a megoldás. Ilyen megértés nélküli direkt translációs stratégiát használt az a tanuló, aki szerint: ha Réka 5 cm-rel magasabb Klárinál, és Réka 158 cm magas, akkor Klári „ $158+5=163$ cm magas”, mert a „magasabb” kulcsszó az összeadás műveletét hívta elő gondolataiban – a feladat megértése nélkül.

Kísérleti körülmények között kimutatható volt, hogy a sikeres feladatmegoldók a feladat kulcsszavánál (amely kulcsszó a művelettel szorosabban vagy lazábban összefüggő) lelassítottak, sőt, gyakran újraolvasták azt. Kintsch és Greeno modelljéhez képest jelentős újdonság, hogy a feladatmegoldás folyamatába belekerült a – gyakran tudatos – tervezés elve, és a megoldás folyamatában elágazások fordulhatnak elő.

A harmadik mérföldkő a realiztikus matematikai modellezés előtérbe kerülés, amikor a matematikai szöveges feladatokban szereplő dolgok és mennyiségek a hétköznapi életből származnak. A korábbi cikkekben láttuk, hogy több ezer éves hagyományai vannak az ilyen feladatoknak, az újdonságot tehát nem a realiztikusságban illő keresni. A realiztikus matematikai feladatok abban segítik a feladatmegoldó folyamat megértését, hogy gyakori összetettségük, esetleges megoldhatatlanságuk, avagy a válasz életszerűsége több ponton is a tanuló tudatos döntését igénylik a feladatmegoldás során.

A feladatmegoldó folyamatra vonatkozó ismeretek, a saját gondolkodási folyamataink megismerése fontos kritériuma az emberi fejlődésnek. A realiztikus feladatok segítségével megváltozhat az osztálytermi légkör, a csoportszervezési és oktatási módszerek, és igazoltan eredményesebb lehet a szöveges feladatok tanítása. Lehetővé válik azoknak a merő automatizmusoknak a leküzdése, amelyek már 3. osztályos korra sok tanulóban kialakulnak, és amelyek szerint „keresd a számadatokat, kösd össze azokat a megfelelő művelettel, és máris megvan a megoldás.” Az ilyen tanulói fölfogás nyilvánvaló zsákutcát jelent a matematikai gondolkodásban, hiszen elmarad a megértés (nemcsak a feladaté, hanem önmagunk gondolkodási folyamataié is).

A kísérleti programunk kutatási előzményei

Két nagy terület egyesítéséből született meg a munkafüzetünk feladatrendszer. Egyrészt a matematikatanításunk hagyományait, a matematikadidaktika fogalomrendszerét követtük. Emellett az emberi gondolkodás kutatásának egyik érdekes területé, a tudásra vonatkozó tudás elméletét és eddigi kutatási eredményeit igyekeztünk fölhasználni. A tudásra vonatkozó tudás kifejezés körmönfontnak tűnik, azonban a helyette szokásosan használat metakogníció kifejezés sem nevezhető magától értetődőnek. Arról van szó, hogy az emberiség Arisztotelész óta keresi a választ arra a kérdésre, hogy vajon megismerhetjük-e teljesen a saját gondolkodásunkat. A problémát az jelenti, hogy amikor a saját gondolkodásunkról gondolkodunk, akkor ezt vajon a gondolkodásunk melyik részével tesszük: vagyis tudunk-e gondolkodásunknak arról a részéről számot adni, amely részével a gondolkodásunkat szeretnénk megismerni...

A huszadik század közepétől születtek az első tudományos igényű próbálkozások a kérdésre, hogy vajon tényleg létezik-e a gondolkodásunknak több szintje. A tudomány jelenlegi állása szerint – valamint pedagógiai szempontból is, szerencsére – célszerű két szintet leírni. Ezek

közül a felső szint feladata, hogy a gondolkodás egésze számára a tervezést, a gondolkodási folyamatok nyomon követését és ellenőrzését megvalósítsa. Minő szerencse, hogy a matematikatanítás számára könnyen befogadható ez az elmélet, Ahogyan azt Pólya 1945-ben írt, majd magyarul többször is kiadott „A gondolkodás iskolája” könyve, majd Skemp „A matematikatanulás pszichológiája” című műve, napjainkban pedig Alan Schoenfeld munkái bizonyítják. A magyar nyelvű szakirodalomban a metakogníció jelenségvilágát alaposabban bemutató könyv is megjelent már.³ A világban több mint egy évtizede folynak olyan matematikai fejlesztő kísérletek, amelyek vezérelve a metakogníció jelenségvilágának beépítése a matematika tanulásába. Néhány ilyen matematikai fejlesztő programnak a pedagógiai kísérletek szempontjából vett ismertetését vállalta Kelemen Rita⁴.

Néhány éve sikerült Magyarországon is olyan fejlesztő programot kidolgozni, amely a saját gondolkodási folyamataink jobb megismerésén keresztül próbálta a tanulókat a jobb matematikai teljesítmény eléréséhez hozzásegíteni. 2004-ben és 2005-ben Békés megye általános iskoláiban 4. osztályos tanulók körében végeztünk kísérleteket a matematika és olvasás területén. A kísérlet leírásában a „Metakognícióra alapozott fejlesztés” kifejezést használtuk, ami arra utalt, hogy a tanulóknak a saját matematikai tudásukra és olvasási folyamataikra vonatkozó tudásukat gyarapítottuk, olyan feladatok alkalmazásával, amelyeket erre alkalmasnak találtunk. A kísérletek eredménye azt mutatta, hogy érdemes a fejlesztésnek ezt az irányát követni, azonban néhány további tényezőt érdemes figyelembe venni:

(1) A későbbi vizsgálatokban szétválasztottuk egymástól a matematikai és az olvasásfejlesztő kísérleteket. Noha továbbra is hiszünk abban, hogy mind a matematika, mind az olvasás területén hasonló gondolkodási folyamatokat jelent a tudásunk felhasználásának tervezése, nyomon követése és ellenőrzése, az adott területek sajátosságai és az alaposabb kutatások igénye a szétválasztást indokolta.

(2) A fejlesztő kísérletünkben közreműködő anitók véleménye szerint az eredetileg 4. osztályosok körében kidolgozott kísérletet érdemes 3. osztályba „levinni”. Egyrészt azért, mert szerintük ott is hasonlóan eredményes lehet, mint 4. osztályban, másrészt a 3. osztályban fejlesztést végző pedagógus így 4. osztályban „élvezheti munkája gyümölcsét”.

(3) A matematika területén egy olyan fejlesztő program kidolgozását határoztuk el, amely a matematikai szöveges feladatok világában hangsúlyozza a tanulók fejében meglévő mentális reprezentációk szerepét. Egyszerűbben fogalmazva: hiszünk abban, hogy az azonos végeredményt produkáló gondolatmenetek sokfélék lehetnek. A szakirodalom a meglehetősen puha és homályos „gondolkodási stílus” kifejezést használja, amikor arról van szó, hogy egyesek például „vizuális típusúak”, míg mások inkább „verbális stílusúak”. A matematika területén nagyon sok esetben alapvetően fontos szemléletesen elképzelnünk fogalmakat (ahelyett, hogy azokat csupán szó szerint bebifláznánk), így érdeklődésünk középpontjába kerültek a matematikai feladatmegoldást segítő rajzok. Az elv, hogy a feladatokhoz rajzok készítsünk, és emellett a rajzok jellegének és szerepét bemutatjuk a feladatmegoldás folyamatában, a fejlesztő program fontos részét képezi.

Munkafüzetünk feladatainak jellemzői

Az előzőekben leírt három jellemző szerint tekintsük át, hogy mit is kell tudni a munkafüzet feladatrendszeréről!

³ Csíkos Csaba (2007). Metakogníció – A tudásra vonatkozó tudás pedagógiája. Műszaki Kiadó, Budapest, 2007

⁴ Kelemen Rita (2007): Fejlesztő kísérletek a realizisztikus matematikai problémák megoldása terén.

Iskolakultúra, 6-7. sz. 36-46.

Metakognícióra alapozott fejlesztés a matematika területén

A metakognícióra alapozott fejlesztés – másképpen fogalmazva – a tanulók saját tudására vonatkozó tudás fejlesztését jelenti. Ennek egyik összetevője a saját tudásra, a tudás felhasználásra, a gondolkodásra vonatkozó ismeretek bővítése, másik területe pedig a gondolkodási (azon belül a problémamegoldási) folyamat tervezése, nyomon követése és ellenőrzése.

A korábban egyeduralkodónak számító nézettel szemben az újabb kutatási eredmények fényében nagyon is lehetségesnek tűnik, hogy az általános iskola alsó tagozatában az alapkészségek fejlesztésének prioritását szem előtt tartva a készségeket tudatos működtető gondolkodási stratégiák fejlesztése előtt is lehetőség nyíljon. Ez azt jelenti, hogy nem kell megvárni, amíg a számolási készség működése 100%-os, vagy ahhoz közeli szintű, hanem gyöngébb szint esetén is lehetséges fejleszteni a számolási készség működését tervező, nyomon követő és ellenőrző tudást. A helyzet analóg az olvasással. Az olvasási készség kezdeti szintjén is fejlődik és fejleszthető az a tudásunk, amely arra vonatkozik, hogy mire használható az olvasás, milyen tempóban érdemes olvasni, és hogyan ellenőrizhetjük, hogy megértettük szöveget. A matematika területén pedig arról van szó, hogy a lassan vagy bizonytalanul számoló tanuló is képes megérteni, hogy a szöveges feladat megoldásában milyen lépések a célravezetők és hogy a kapott végeredmény vajon valóságos-e.

Szükséges, akár kimondva, akár a tanári mintaadás segítségével néhány feladatmegoldási eljárást vagy szabályt megtanulni már alsó tagozatban. Egyik példa erre az egyszerű szöveges feladatok esetén gyakran hatékony „keresd a számadatokat a feladat szövegében, végezd el a szükséges műveletet, és megkapod az eredményt”. Vigyázat! Mint ahogyan nem létezik olyan olvasási stratégia sem, amely egyaránt megfelelő egy krimi, egy újságcikk vagy egy modern vers elolvasásánál, az egyetlen, és minden feladtnál célravezető megoldási módszer keresése is hiábavalóság a matematikában. (Ennek ellenére mégis találkozunk a tankönyvekben megtanulandó, pontba szedett listákkal, amelyek a feladatmegoldás kötelező lépéseiként jelennek meg.) Ha mégis szabályokba kellene foglalni a feladatmegoldás folyamatát, akkor annak négy általános lépése lenne: 1. Olvasd és a feladat szövegét, és értsd meg! 2. Készíts tervet a megoldáshoz! 3. Végezd el a számításokat, ha szükséges! 4. Ellenőrizd a kapott eredményt! A négy lépés közül tulajdonképpen csak az első és az utolsó nélkülözhetetlen, és akár a tervezés lépésének, akár a számítások leírásának megkövetelése sokszor elveszi a tehetséges tanulók kedvét a matematika művelésétől. A feladatrendszerünknek a számukra is van hozadéka: tudatossá válhat számukra, hogy mások (és így saját) gondolkodási folyamataiban milyen buktatók lehetségesek.

A matematikai gondolkodás fejlesztésének sajátosságai 3. osztályban

Mivel az országosan egységesen kötelező tantervi szabályozás jelenleg nem ír elő 3. osztályban vagy annak végére elsajátítandó ismereteket és készségeket, a fejlesztés konkrét területeinek meghatározásában egyrészt a leggyakrabban használatos tankönyvek gyakorlatát, másrészt a matematikai gondolkodás fejlődésének feltárt jellemzőit vehetjük alapul. A szöveges feladatok a 3. osztályos tankönyvekben nagyon fontos szerepet játszanak. A tankönyvek között ugyanakkor jelentős különbségek vannak. Az egyik alapvető különbség, hogy a szöveges feladatok vajon a számolási készség szövegbe öltöztetett, drillszerű gyakorlási terepét jelentik, avagy valóságos objektumok és viszonyok leírásai, amelyek megoldásához eszközt jelentenek a matematikai mennyiségek és műveletek. Gyakran formai szempontból azonos szöveges feladatok között abban mutatkozik különbség, hogy a tankönyv „szellemisége” milyen megoldásmintázatokat tekint jónak és/követendőnek. Nincsenek tehát önmagában véve jó vagy

kevésbé jó feladatok. Az, hogy egy szöveges feladat milyen célra használható, függ az oktatási módszerektől, ezen belül nagymértékben a csoportszervezési és szemléltetési módoktól.

Képek a fejünkben a matematikai feladatmegoldás során

A problémamegoldás folyamatának tudományos vizsgálata az elme belső képeinek, azok szerveződésének fontosságát hangsúlyozza. A hatékony gondolkodásban a szavak szintjén megjelenő tudás és a képekben tárolt tudás megfelelő összhangja figyelhető meg. A képekhez hasonlóan a hangképzetek, az ízlelés, szaglás és tapintás képzetek is mind jelentősek a gondolkodásunkban, de a képek azok, amelyek a legtöbb információt tárolják, és amelyek a matematikai jelenségek megértéséhez a legalapvetőbbek.

A matematika területéhez köthető hármaskód-elmélet például a számok tárolásának három formáját és ezek egymás közötti viszonyát a számjegy képe, a szám neve és a hozzájuk kapcsolódó számosság-kép alapján képzeletben el. Nyilvánvaló, hogy a számokhoz kapcsolódó számosság-kép egyénenként, sőt feladathelyzetenként más lehet: táblajátékok esetén a hatos számot a dobókocka hat pöttyének elképzelt képe jelölheti, de egy matematikai feladatban a hatot gyakran a számegyenesen az öttől eggyel jobbra lévő pontként képzeletben el.

Mivel a saját tudásunk, a saját problémamegoldó folyamataink megismerése előnyt jelent a problémamegoldásban, így a számosság-képpel kapcsolatos tudás is ebbe a körbe tartozik. Azt szeretnénk tehát vizsgálni, hogy a matematikai feladatokban szereplő mennyiségek és az azok közötti mennyiségi kapcsolatok megjelenítése hogyan segíti a problémamegoldást. Többről van itt szó, mint arról, hogy „a feladat elolvasása után készítsünk ábrát!” felszólítás nyomán a tanulók megpróbálják kitalálni, milyen ábrára gondolt a tanító. Szeretnénk, ha a tanulók meggyőződésévé válna, hogy az egyszerűbb feladatok esetében is érdemes rajzos formában megalkotniuk a feladat matematikai modelljét. Nyilvánvaló, hogy fontos különbség van a fejünkben meglévő képek és a lerajzolt képek között. Ezek kapcsolata ugyanis függ a rajzi készség szintjétől. Valószínű ugyanakkor, hogy a matematikai mennyiségek fejünkben meglévő képei és azok lerajzolt megfelelői között eléggé közeli kapcsolat van, éppen a matematikai képek egyszerűsége, lényegre törő jellege miatt. Azt pedig sikerült igazolnunk a fejlesztő kísérletünkben, hogy a rajzkészség szintje nem befolyásolja a fejleszhetőséget, tehát az ügyesen és a kevésbé ügyesen rajzoló tanulók számára egyformán hatékony a feladatsor használata.

A tanár szerepével kapcsolatban két jelentős elvárásunk van. Egyrészt a tanulói válaszok sokféleségének bátorítása és „tolerálása” fontos elemmé válik. Másrészt a tanári magyarázat nem elsősorban a feladat helyes megoldását magyarázná el, legalábbis abban az értelemben, ahogyan a megoldásról mint eredményről vagy folyamatról beszélünk. Ehelyett a megoldás gondolkodási folyamatait, a lehetséges buktatókat a tanulók számára érthető módon megnevezzük, és a hangosan gondolkodás élményével igyekszünk megváltoztatni azt a – kutatások szerint sok tanulóban már 10 éves korra rögzült – meggyőződést, amely szerint a matematikai feladatok megoldásának lényege a gyors és pontos válaszadás. Nyilvánvaló, hogy bizonyos helyzetekben a gyors és pontos válasznál nincs jobb, de a gyorsaságra és pontosságra törekvés sok életszerű szöveges feladat esetén helytelen megoldásra vezet. A feladataink között némelyiknél „pontos” megoldás, néha pedig tudatos tervekészítéssel (gyakran rajz formájában készülő tervvel) jutunk előbbre a feladatmegoldásban.

A feladatmegoldás során készülő rajzok típusai

Mary Hegarty kutatásai alapján a matematikai feladatokhoz készülő rajzoknak két fő típusát különböztetjük meg. Az egyik típus esetén a rajz igyekszik valósághű és méretarányos lenni, a másik típusú rajzok leegyszerűsítik az ábrázolást, vagyis sematikusak. Általánosságban az

derült ki (idősebb tanulókkal végzett kutatásból), hogy a legjobb feladatmegoldók a lényegre törő, sematikus rajzokat alkalmazzák elsősorban, míg a részletekbe menő élethűségere törő rajzok készítői gyöngébb teljesítményt nyújtanak. A kétféle rajztípust a továbbiakban piktorialisnak és sematikusnak fogjuk nevezni.

Már most leszögezzük, hogy nem célunk minden feladat esetében sematikus rajz készítését megkövetelni. Viszont célunk az, hogy a tanulók ismerjék fel a feladatmegoldás folyamán készülő rajzok fontosságát. Emellett arra törekszünk, hogy kialakítsunk egy reperotárt, vagyis megismerjenek többféle rajztípust, és ezzel párhuzamosan alakuljon ki bennük meggyőződés arra vonatkozóan, hogy melyik rajztípusnak milyen előnyei vagy hátrányai vannak. Mint általában a feladatmegoldás stratégiáira is jellemző, itt is elmondható, hogy a célszerű rajztípus az egyéntől és a feladattól egyaránt függ, tehát nem tudunk minden feladathoz és mindenki számára érvényes receptet átnyújtani. Mindemellett ki szeretnénk alakítani azt a meggyőződést, hogy érdemes rajzot készíteni, még akkor is, ha látszólag nagyon könnyű egy feladat.

Kedves Szülők!

Ahogy a címben és a bevezetőben is jeleztük, munkafüzetünket szülők számára is készítettük, igyekeztünk azt otthoni gyakorlásra is alkalmassá tenni. Vannak feladatok, amelyeknél az iskolai tanórára tervezett feladatot csak módosítással alkalmazhatjuk otthoni, egyéni tanulás esetén, hiszen otthon csak ritkán van lehetőség kortárs csoportban dolgozni... A szülő ezeknél a feladatoknál mint tanulótárs vegyen részt a feladatmegoldás folyamatában!

Gyakori szülői vélekedés, hogy „a matematikai attól szép, hogy ott nem lehet mellébeszélni. Vagy kijön a helyes végeredmény, vagy nem.” Szeretnénk ezt a meggyőződést is megváltoztatni- Bár matematikusok és a matematikadidaktika elismert szakemberei régóta hangsúlyozzák, hogy a matematika nem az abszolút igazságok tárháza, hanem egy szabályozott tevékenység-rendszer, amelyben mindenki megtalálhatja a rendet, a harmóniát és a sikerélményt egyaránt. Sok esetben a tankönyvek, a feladatgyűjtemények és a pedagógusok szemlélete inkább azt a felfogást tükrözi, amelyet Cser Andor a „tanárról tanárra szálló hagyományok kritikátlan átvételeként” jelöl. Vagy említhetjük Pólya gondolatát is, aki szerint a matematika tanítása arra alkalmas, hogy a matematika utálatát egyik generációról a másikra örökítse.

Nem kétséges, a mai iskolában is tudni kell mindenkinek írni, olvasni és számolni, ahogyan a három legfontosabb alapkészséget együtt szokás emlegetni. De ha előre tekintünk, és megnézzük, hogy a mai fejlett társadalmak igényeit megtestesítő PISA vizsgálatokban milyen matematika-fölfogás jelenik meg, akkor be kell látnunk, a pusztán számolni tanítás mellett a matematika fontos feladata a problémamegoldás képességének fejlesztése. Ezzel a szemléletmóddal, és ezzel a hittel készült feladatgyűjteményünk.

A feladatrendszer szerkezete

Tanítási egység	Szövegesfeladat-típus			
	Számtani művelettel megoldható	Egy darab megoldás	Egy lépésben megoldható	Egyenes szövegezésű
1	n	i	-	-
2	n	n	-	-
3	n	i	-	-
4	n	n	-	-
5	i	-	i	i
6	i	-	i	i
7	i	-	i	n
8	i	-	i	n
9	i	-	i	i/n
10	i	-	i	i/n
11	A feladatokhoz készíthető rajzok típusainak elemzése			
12	n	n	-	-
13	i	-	i	i
14	n	n	-	-
15	i	-	i	n
16	i	-	i	i
17	i	-	i	i/n
18	i	-	i	i/n
19	i	-	n	i
20	i	-	n	n

Jelmagyarázat: i = igen, n = nem, i/n = adott órán belül változik, hogy igen vagy nem

Az egyes oszlopok értelmezése:

Számtani művelettel megoldhatóság: Fontosnak tartottuk, hogy a program kezdetén, majd közben is visszatérően, szerepeljenek olyan szöveges feladatok, amelyek nem oldhatók meg egy vagy két számtani művelettel. A nemzetközi szakirodalomból ismertek olyan feladatok, amelyek formai szempontból rendes matematikai szöveges feladatnak látszanak, de valójában értelmetlenek (ld. Flaubert példáját), de mi itt nem szerepeltetünk ilyeneket. Viszont alkalmazunk olyan feladatokat, amelyekben kombinatorikai jellegű változatszámolás vagy egyenlőtlenséggel megoldható nyitott mondat szerepel.

A megoldások száma: Nyilván akkor fontos ez a szempont, amikor nem számtani művelettel megoldható a feladat. (Számtani művelettel történő megoldás esetén egyértelműen egy végeredmény adódhat.) Célunk itt is több lehetőség megmutatása volt.

A megoldás lépéseinek száma: A harmadik osztályos tankönyvekben már találkozhatunk olyan feladatokkal, amelyek megoldásához több, egymás után elvégzendő számtani művelettel jutunk. Csak a programunk végén jelennek meg a két lépésben megoldható feladatok.

Egyenes és fordított szövegezés: A korábban leírtaknak megfelelően: egyenes szövegezésű feladatok esetén a kulcsszó az elvégzendő művelethez társul a gondolkodásban.

Fejlesztő feladataink és a tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei

1. tanítási egység

Feladatok:

1) Két fiú, András és Csaba, és két lány, Panni és Éva, egymás mellett ülnek egy padon. Hányféleképpen ülhetnek le úgy, hogy mindkét szélén fiú üljön?

2) Dél és délután három óra között hányszor fedi az óra nagymutatója a kismutatót?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

A külön nem jelzett tanítási egységektől eltekintve megtartjuk a „hagyományos”, frontális munkaszervezést. A tanulók egyénenként megkapják az adott óra feladatainak szövegét egy-egy munkalapon, önállóan dolgoznak rajta, majd a tanári magyarázat fázisa következik. (Néhány későbbi tanítási egységben csoportmunkát javasolunk a tanulók számára.)

1) Mutatunk kétféle rajzos modellt. (Piktoriális és sematikus rajz; részletes és lényegi)

1. sz. fólia

2) Kétféle értelmezés van: Beleszámít a dél, vagy sem. Erről beszélgetni kell.

- Lehetőség szerint számlapos órával szemléltetjük.

- Képi modell: táblai rajz

2. tanítási egység

Feladatok:

3) A postás egy lakótelepi házban 8 ajánlott levelet vitt, amit személyesen kellett átadnia, 14 lakásba pedig pénzt. Hány lakásba kellett becsengetnie?

4) Anna és Gyöngyi margarétát szedett anyák napjára. Ketten együtt 20 szálát szedtek. Gyöngyi többet, mint Anna. Mennyit szedhettek külön-külön?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

3) Egyéni munkában gondolkodnak a feladaton. (Várhatóan 22 lesz a megoldásuk) Eljuttassák a történetet: Egy postás 8 „levelet” és 14 játékpénzt kap. A játék során kézbesíti a küldeményeket. Egy következő postás feladata, hogy másképp kézbesítse. Tanári magyarázat: Több lehetséges megoldás van. (egy ember nem biztos, hogy csak egyféle küldeményt kap.) Ezután jöhet a szélső esetek megkeresése: Legkevesebb vagy legtöbb lakás.

4) Néhány rendszertelenül előállított megoldás meghallgatása után a táblán kétféle modellt rajzol. 1: 20 szál margarétát rajzol egymás mellé. Vonalakkal választja két részre. 2: Kétsoros táblázat, amit közösen töltenek ki. Táblakép

3. tanítási egység

Feladat:

5) A cukrászdában francia krémes, linzer és kókuszgolyó kapható. Három süteményt szeretnék hazavinni. Hányféleképpen választhatok?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

5) Rögzítjük, hogy lehet akár mind a három sütemény egyforma. A fólián kétféle rajz szerepel. Részletes és lényegi. Hamar látjuk, hogy a részletes rajzok befejezése túlságosan időigényes. Az összes esetet a sematikus rajzokkal oldjuk meg: FFF, FFK, FFL, FKL, FLL, FKK, LLL, KKK, LLK, LKK. A felírás sorrendje többféle logikát követhet. A gyerek indokolják a megoldásukat. (Honnan tudod, hogy mindet megtaláltad, és nem írtál le valamit többször?) 2. sz. fólia

4. tanítási egység

Feladatok:

6) Jancsi 23 m távolságra tudta dobni a kislabdát, Réka pedig ennél messzebbre. Milyen messzire dobhatta Réka a kislabdát?

7) A diákolimpián azok indulhatnak távolugrásban, akik már legalább 300 cm-t ugrottak. Józsi nem jutott ki a versenyre. Milyen eredménye lehetett?

8) Gondoltam egy páros számra. Tízesekre kerekített értéke 240. Melyik számra gondolhattam?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

6) A feladatban több kérdés marad nyitva. Milyen messze lehet egyáltalán eldobni a kislabdát egy 9 évesnek? Milyen pontossággal mérjük? A táblára számegyenes-részletet rajzoljunk. Arról beszélgessünk, hogy van olyan feladat is, amelynek nincs jól meghatározható végeredménye.

7) Az előző feladat megoldási módját követhetjük.

8) Az ideális számegyenes-darabot felrajzoljuk a táblára.

5. tanítási egység

Feladatok:

9) Éva 132 cm magas. Juli 9 cm-rel magasabb Évánál. Milyen magas Juli?

10) Egy szál rózsa ára 200 Ft, a díszítés 150 Ft. Mennyibe kerül egy szál feldíszített rózsa?

11) Józsinak 605 Ft-ja volt, ám elköltött 300 Ft-ot. Mennyi pénze maradt?

12) A 13 állatkerti majom közül kettő megszökött. Hány majom van az állatkertben?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

9-12) A valóságghú rajzok és a szakaszos ábrázolások összevetése. Fóliák

6. tanítási egység

Feladatok:

13) Az üvegházban tízliteres kannával locsolnak. Reggelente 7 kanna víz kell. Hány liter víz fogy egy reggel az üvegház növényeinek meglocsolásához?

14) Hány oldalt olvas egy hét alatt az a gyerek, aki naponta csak 5 oldalt olvas?

15) Andi 1000 Ft zsebpénzt kapott az 5 napos kirándulásra. Azt tervezi, hogy minden nap ugyanannyi pénzt költ. Mennyi pénz jut egy napra?

16) Ma reggel három egyforma csokrot rendeltek. 21 szál szegfűt szedett le hozzá a kertész. Hány szálat kötöttek egy csokorba?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

13-16) A valóságű rajzok és a szakaszos ábrázolások összevetése. Fóliák

7. tanítási egység

Feladatok:

17) Jutkának 25 üveggolyója van, 5-tel több, mint amennyi Petinek. Hány üveggolyója van Petinek?

18) Éva 132 cm magas, 9 cm-rel alacsonyabb Julinál. Milyen magas Juli?

19) A barackbefőtt ára üveg nélkül 380Ft. Ez 25 Ft-tal kevesebb, mint üveggel együtt. Mennyibe kerül a barackbefőtt üveggel együtt?

20) Marcinak most 440 Ft-ja van, 350 Ft-tal több mint amennyi reggel volt, mert a nagypapája adott neki zsebpénzt. Mennyi pénze volt reggel?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

17) A felületes megoldás a 25 és az 5 összeadásából eredhet, illetve abból, ha a gyerek csak a szám adatokra és a műveletre utaló szóra összpontosít. Beszélgessenek arról, hogy a jó rajz segíthet elkerülni ezt a hibát.

18) A felületes megoldás $132-9=123$.

19) A felületes megoldás: $380-25=355$

20) A felületes megoldás: $440+350$

8. tanítási egység

Feladatok:

21) A legolcsóbb játékautó harmadannyiba kerül, mint a legdrágább. A legolcsóbb ára 330 Ft. Mennyibe kerül a legdrágább?

22) Nagypapa a négy unokája részére egyenlően szétosztotta kertben összegyűjtött diószemeket. Egy unoka 60 szem diót kapott. Mennyi diót osztott szét nagypapa?

23) Annának 18 üveggolyója van, háromszor annyi, mint Eszternek. Hány üveggolyója van Eszternek?

24) A vasárnapi mozielőadásra 400 ember jött el, épp kétszer annyian, mint a szombati előadásra. Hányan voltak a szombati előadáson?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

21) Felületes megoldás: $330/3=110$

22) Felületes megoldás: $60/4=15$

23) Felületes megoldás: $18*3=54$

24) Felületes megoldás: $400*2=800$

9. tanítási egység

Feladatok:

- 25)** A kisboltban a vaj 180 Ft-ba kerül, a piacon 10 Ft-tal kevesebbe. Mennyibe kerül a vaj a piacon?
- 26)** A kisboltban a vaj 180 Ft-ba kerül, 10 Ft-tal többbe, mint a piacon. Mennyibe kerül a vaj a piacon?
- 27)** Józsi 36 kg, Peti 6 kg-mal nehezebb. Hány kg Peti?
- 28)** Józsi 36 kg, és 6 kg-mal nehezebb, mint Peti. Hány kg Peti?
- 29)** Ha Orsinak 100 Ft-tal több pénze lenne, akkor ugyanannyi pénze lenne, mint Sárinak. Sárinak 650 Ft-ja van. Mennyi pénze van Orsinak?
- 30)** Ha Orsinak 100 Ft-tal kevesebb pénze lenne, akkor ugyanannyi pénze lenne mint Sárinak. Sárinak 650 Ft-ja van. Mennyi pénze van Orsinak?
- 31)** Ha Orsi odaadna 100 Ft-ot Sárinak, akkor ugyanannyi pénzük lenne. Sárinak 650 Ft-ja van. Mennyi pénze van Orsinak?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Egyenként beszéljenek a feladatokról. Páronként hasonlítsák össze azokat. Melyiknél utal a szövegben szó a műveletre, és melyiknél nem? A rajzkészítést a gyerekekre bízhatjuk. Végül számoljanak be arról, hogy milyen rajzot készítettek.

A 31. feladat megoldását játsszák el, mivel itt nem működik a szokásos stratégia! Tapasztalják azt, hogy a próbálgatás is lehet a feladatmegoldás módszere.

10. tanítási egység

Feladatok:

32) Nekeresd városnak háromszor annyi lakója van, mint Sohavárnak. Sohavárnak 300 lakója van. Mennyi lakója van Nekeresdnek?

33) Nekeresd városnak háromszor annyi lakója van, mint Sohavárnak. Nekeresdnek 300 lakója van. Mennyi lakója van Sohavárnak?

34) A fürdőkádba harmadannyi víz fér, mint a felfújható medencébe. A fürdőkádba 90 liter víz fér. Mennyi víz fér a felfújható medencébe?

35) A vödörbe harmadannyi víz fér, mint a dézsába. A dézsába 27 liter víz fér. Mennyi víz fér a vödörbe?

36) Ha négyszer több pénzem lenne, mint amennyi most van, akkor 1000 Ft-om lenne. Mennyi pénzem van most?

37) Most 220 Ft-om van. Ha négyszer több pénzem lenne, mint most, akkor mennyi pénzem lenne?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Egyenként beszéljenek a feladatokról. Páronként hasonlítsák össze azokat. Melyiknél utal a szövegben szó a műveletre, és melyiknél nem? Ezért lehet érdemes minden feladathoz rajzot készíteni.

11. tanítási egység

Feladat:

38) A könyvesbolt kirakatában láttam egy könyvet Afrika vadállatairól 670 Ft-ért. Ha 150 Ft-tal több pénzem lett volna, megvehettem volna. Mennyi pénz volt nálam?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

38) A hatféle rajzot egyszerre vetítjük ki a fólián. Először a matematikailag hibásakat vetjük el. Beszélgetünk arról is, hogy melyik rajz mennyi munkát, mennyi időt követel, miért célravezető és miért nem. A matematikailag helyes rajzokat azonban elfogadjuk.

A hat kép két szempont mentén rendezhető: (1) matematikailag korrekt vagy sem, és (2) „zajos” piktoriális, piktoriális és sematikus.

12. tanítási egység

Feladatok:

39) Karcsi és Gyuri együtt rendeznek születésnapot. Karcsi 10 gyereket hívott, Gyuri 12 gyereket. Hány gyereket hívhattak?

40) Két fa között, amelyek egymástól 5 m távolságra vannak, köteleket szeretnénk kifeszíteni. Sajnos, csak 1 m hosszú kötéldarabok vannak. Hányat kell ezekből egymáshoz kötni?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

39) Felületes megoldás: $10+12=22$ Beszélünk arról, hogy vannak-e közös barátaik. Játsszák el!

40) A felületes megoldás szerint 5 db kötéltre van szükség. Beszéljünk arról, hogy a csomózás és a fákhöz való rögzítés elvesz a kötelek hosszából. A megoldást illetően hagyjuk nyitva a feladatot. Csak annyit tudunk biztosan mondani, hogy ötnél több kötéltre van szükség.

13. tanítási egység

Feladatok:

41) A pohárban már van 2 dl tej. Hozzáöntünk még egy deciliter tejet. Mennyi tej lesz a pohárban?

42) Egy buszon 40 ember utazik. Az egyik megállóban leszállnak 10-en. Hány ember marad a buszon?

43) 300 évvel ezelőtt egy királyfi 5 évvel volt idősebb a húgánál. A húga akkor 13 éves volt. Hány éves volt a királyfi?

44) A boltos két kisebb ládából egy nagyobb ládába rakja az almát. Az egyik ládából 40, a másikkól 75 almát rak a nagy ládába. Mennyi alma van a nagy ládában?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

.A feladatok feldolgozását csoportmunkában javasoljuk. Várható, hogy felbukkannak a következő kérdések:

41) És ha a pohár csak kétdecis?

42) És ha fölszállnak néhányan?

43) És miért van a feladat szövegében a 300?

44) Feltéve, hogy üres volt.

Ha nem merülnek fel ezek a kérdések, a tanító provokálja ki! Tanulság: Vannak olyan feladatok, amiben nem adnak meg minden információt, csak odaképzeljük. Van, hogy felesleges adat szerepel benne. Bár a kérdések felvetődnek, általában egyetért abban a tanító és a diák, hogy mi tekinthető helyes megoldásnak.

Ebben az egységben nem foglalkozunk a rajzkészítéssel, a feladat megoldhatósága kerül központba.

14. tanítási egység

Feladatok:

45) Az egyik kerékpáron ketten utaznak, a másikon háromszor annyian. Hányan utaznak a második kerékpáron?

46) Zsoltinak 10 léggömbje van, négyszer annyi, mint Klárinak. Hány léggömbje van Klárinak?

47) Ha Pista egy év alatt 3 cm-t nő, akkor mennyit nő 50 év alatt?

48) A 22 fős osztály tanulóit 4 egyenlő létszámú csoportba osztottuk be. Hányan voltak egy csoportban.

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

A feladatok feldolgozását csoportmunkában javasoljuk. A csoportos munkaszervezési mód célszerű megvalósítása: 5-6 tanulói csoport, mindegyikben vegyesen jobb és gyengébb képességű tanulók. A csoportmunka végén a csoportok „szóvivői” elmondják a csoport megoldását és az esetleges ellenvéleményeket.

Várható, hogy felbukkannak a következő felületes megoldások:

45) Hatan utaznak egy kerékpáron?

46) Két és fél léggömb?

47) 50 év alatt 150 cm-t nő.

48) 5 és egynegyed gyerek.

Ha nem merülnek fel ezek a kérdések, a tanító provokálja ki! Tanulság: Vannak olyan feladatok, amelyeket nem lehet megoldani. A feladat szövege alapján elvégzett művelet eredménye nem valóságos. Ebben az egységben sem foglalkozunk a rajzkészítéssel, a feladat megoldhatósága kerül központba.

A gyerekektől kérdezzük meg, hogy mit módosítsunk a feladaton ahhoz, hogy értelmesen megoldható legyen!

15. tanítási egység

Feladatok:

49) A pohárba 1 dl-rel több tej fér, mint amennyi most benne van. 3 dl-es a pohár. Most mennyi tej van benne?

50) Az egyik megállóban senki nem szállt le a buszról, de fölszálltak négyen. Most 40 ember utazik a buszon. Hányan voltak a buszon korábban?

51) Budapestről 7 km-re van egy bolt, amelyben 3 polcon sorakoznak különféle csokik. A Boci csoki 20 Ft-tal többbe kerül, mint a Tibi csoki. A Boci csoki ára 200 Ft. Mennyibe kerül a Tibi csoki?

52) Az akváriumban 25 hal úszkál, amelyek között bölcsőszájú halból 3-mal több van, mint páncélosharcsából. Két páncélosharcsa van az akváriumban. Hány bölcsőszájú hal van benne?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Ismét a rajzkészítést állítjuk központba. Önállóan dolgozzanak. Készítsenek olyan rajtot, ami segíti a megoldást. Gyűjtsük össze, hogy milyen típusú rajzok szerencsések a feladathoz.

Csak ezt követően mutatjuk meg a fóliákat.

16. tanítási egység

Feladatok:

53) A nagy turistabuszba ötször annyian férnek, mint a kisbuszba. A nagy turistabusz 45 embert tud szállítani. Hányan férnek a kisbuszba?

54) Csilla 15 tábla csokit kapott a születésnapjára, háromszor többet, mint Lali. Hány tábla csokit kapott Lali?

55) Laci feleannyi idő alatt megoldotta a házi feladatot, mint a kisöccse. A kisöccsének 26 percig tartott megoldani a házi feladatot. Mennyi idő kellett Lacinak?

56) Gyuszi fele olyan magas hegyre mászott föl a nyáron, mint Feri. Gyuszi egy 507 méter magas hegyre jutott föl. Milyen magas hegyre mászott föl Feri?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Ismét a rajzkészítést állítjuk központba. Önállóan dolgozzanak. Készítsenek olyan rajtot, ami segíti a megoldást. Gyűjtsük össze, hogy milyen típusú rajzok szerencsések a feladathoz.

Csak ezt követően mutatjuk meg a fóliákat.

17. tanítási egység

Feladatok:

57) Jóskának 70-nél több üveggolyója van, mint Timinek. Timinek 150 üveggolyója van. Hány üveggolyója van Jóskának?

58) 150 pokémonos matricám közül elvesztettem 70-et. Hány pokémonos matricám van most?

59) Ha 70-nél több játék katonám lenne, akkor 150 lenne. Hány játék katonám van?

60) A matematika versenyen 150 perc jut a feladatok megoldására. Még 70 percem van hátra. Hány perce dolgozom?

61) Találjatok ki olyan feladatot, amelyben a 70 és a 150 számok szerepelnek, és ami összeadással vagy kivonással oldható meg!

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Önállóan dolgozzanak. Készítsenek olyan rajzot, ami segíti a megoldást. Gyűjtsük össze, hogy milyen típusú rajzok szerencsések a feladathoz.

Csak ezt követően mutatjuk meg a fóliákat.

18. tanítási egység

Feladatok:

62) Egy kisbusz a sofőrt és még 8 utast tud szállítani. A focicsapat 28 szurkolóját hány autóbusz tudja elszállítani?

63) 28 liter levest készítettek az iskolai konyhán, amit 8 egyforma edénybe öntöttek bele, és mindegyik edénybe ugyanannyi leves került. Hány liter leves került egy edénybe?

64) Egy kézilabdacsapat 7 játékosból áll. 30 gyerek hány kézilabdacsapatot tud alakítani?

65) 38 virághagymát vett Zsuzsi anyukája. A virághagymákat úgy ülteti a kertbe, hogy minden sorba 8 kerüljön. Hány virághagymát nem fog így a kertbe ültetni?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Mindegyik feladatban osztást végzünk, de a feladat végeredményét a valóságos dolgok figyelembevételével kapjuk.

Önállóan dolgozzanak. Készítsenek olyan rajzot, ami segíti a megoldást. Gyűjtsük össze, hogy milyen típusú rajzok szerencsések a feladathoz.

Csak ezt követően mutatjuk meg a fóliákat.

62) Felvetődhet a kérdés: És ha valamelyik szurkoló sofőr?

19. tanítási egység

Feladatok:

66) Tavaly 5 zebra volt az állatkertben, az idén hoztak még négyet. Ha jövőre is hoznak még négyet, akkor hány zebra lesz az állatkertben?

67) Nagymama 15 palacsintát sütött. Az unokák megettek kilencet. A nagymama ezután sütött még hármat. Hány palacsinta maradt?

68) Reggel 1450 Ft-om volt. Délelőtt elköltöttem 230 Ft-ot, délután pedig még 100 Ft-ot. Mennyi pénzem maradt estére?

69) Viki 12 hógolyót gyúrt, Tomi pedig kilencet. A célbadobáshoz 15 hógolyót dobtak el. Mennyi hógolyójuk maradt?

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Önállóan dolgozzanak. Készítsenek olyan rajzot, ami segíti a megoldást. Gyűjtsük össze, hogy milyen típusú rajzok szerencsések a feladathoz.

20. tanítási egység

Feladatok:

70) Zoli 133 cm magas, 10 cm-rel alacsonyabb, mint Kinga. Ha Kinga 3 cm-rel magasabb lenne, akkor ugyanolyan magas lenne, mint Sanyi. Hány cm magas Sanyi?

71) Délelőtt 15 oldallal többet olvastam el a könyvből, mint délután, de 10 oldallal kevesebbet, mint tegnap. Mennyit olvastam tegnap óta, ha délután 10 oldalt olvastam?

72) A polcomon három sorban vannak a könyvek. Az alsó soron tízzel több könyv van, mint a felsőn, a középsőn pedig négyel kevesebb, mint az alsón. A felső polcon csak egy könyv van.

73) A távolugróverseny győztese 12 cm-rel messzebbre ugrott, mint a második helyezett, aki 3 cm-rel előzte meg a harmadik helyezettet. A harmadik helyezett eredménye 300 cm volt.

A tanári segítségnyújtás és magyarázat elemei:

Önállóan dolgozzanak. Készítsenek olyan rajzot, ami segíti a megoldást. Gyűjtsük össze, hogy milyen típusú rajzok szerencsések a feladathoz.

Feladatok kiemelhető, fénymásolható lapokon

(egy tanítási egység feladatai alapesetben egy lapra kerülnek, megfelelő teret hagyva köztük, de egy lapra legfeljebb két feladat kerüljön, és a páratlanadik oldalakat perforálással vagy más módon lehetne kiemelhetővé tenni.)

- 1) Két fiú, András és Csaba, és két lány, Panni és Éva, egymás mellett ülnek egy padon. Hányféleképpen ülhetnek le úgy, hogy mindkét szélén fiú üljön?
- 2) Dél és délután három óra között hányszor fedi az óra nagymutatója a kismutatót?
- 3) A postás egy lakótelepi házban 8 ajánlott levelet vitt, amit személyesen kellett átadnia, 14 lakásba pedig pénzt. Hány lakásba kellett becsengetnie?
- 4) Anna és Gyöngyi margarétát szedett anyák napjára. Ketten együtt 20 szálát szedtek. Gyöngyi többet, mint Anna. Mennyit szedhettek külön-külön?
- 5) A cukrászdában francia krémes, linzer és kókuszgolyó kapható. Három süteményt szeretnék hazavinni. Hányféleképpen választhatok?
- 6) Jancsi 23 m távolságra tudta dobni a kislabdát, Réka pedig ennél messzebbre. Milyen messzire dobhatta Réka a kislabdát?
- 7) A diákolimpián azok indulhatnak távolugrásban, akik már legalább 300 cm-t ugrottak. Józsi nem jutott ki a versenyre. Milyen eredménye lehetett?
- 8) Gondoltam egy páros számra. Tízesekre kerekített értéke 240. Melyik számra gondolhattam?
- 9) Éva 132 cm magas. Juli 9 cm-rel magasabb Évánál. Milyen magas Juli?
- 10) Egy szál rózsza ára 200 Ft, a díszítés 150 Ft. Mennyibe kerül egy szál feldíszített rózsza?
- 11) Józsinak 605 Ft-ja volt, ám elköltött 300 Ft-ot. Mennyi pénze maradt?
- 12) A 13 állatkerti majom közül kettő megszökött. Hány majom van az állatkertben?
- 13) Az üvegházban tízliteres kannával locsolnak. Reggelente 7 kanna víz kell. Hány liter víz fogy egy reggel az üvegház növényeinek meglocsolásához?

14) Hány oldalt olvas egy hét alatt az a gyerek, aki naponta csak 5 oldalt olvas?

15) Andi 1000 Ft zsebpénzt kapott az 5 napos kirándulásra. Azt tervezi, hogy minden nap ugyanannyi pénzt költ. Mennyi pénz jut egy napra?

16) Ma reggel három egyforma csokrot rendeltek. 21 szál szegfűt szedett le hozzá a kertész. Hány szálat kötöttek egy csokorba?

17) Jutkának 25 üveggolyója van, 5-tel több, mint amennyi Petinek. Hány üveggolyója van Petinek?

18) Éva 132 cm magas, 9 cm-rel alacsonyabb Julinál. Milyen magas Juli?

19) A barackbefőtt ára üveg nélkül 380Ft. Ez 25 Ft-tal kevesebb, mint üveggel együtt. Mennyibe kerül a barackbefőtt üveggel együtt?

20) Marcinak most 440 Ft-ja van, 350 Ft-tal több mint amennyi reggel volt, mert a nagypapája adott neki zsebpénzt. Mennyi pénze volt reggel?

21) A legolcsóbb játékautó harmadannyiba kerül, mint a legdrágább. A legolcsóbb ára 330 Ft. Mennyibe kerül a legdrágább?

22) Nagypapa a négy unokája részére egyenlően szétosztotta kertben összegyűjtött diószemeket. Egy unoka 60 szem diót kapott. Mennyi diót osztott szét nagypapa?

23) Annának 18 üveggolyója van, háromszor annyi, mint Eszternek. Hány üveggolyója van Eszternek?

24) A vasárnapi mozielőadásra 400 ember jött el, épp kétszer annyian, mint a szombati előadásra. Hányan voltak a szombati előadáson?

25) A kisboltban a vaj 180 Ft-ba kerül, a piacon 10 Ft-tal kevesebbe. Mennyibe kerül a vaj a piacon?

26) A kisboltban a vaj 180 Ft-ba kerül, 10 Ft-tal többbe, mint a piacon. Mennyibe kerül a vaj a piacon?

27) Józsi 36 kg, Peti 6 kg-mal nehezebb. Hány kg Peti?

28) Józsi 36 kg, és 6 kg-mal nehezebb, mint Peti. Hány kg Peti?

29) Ha Orsinak 100 Ft-tal több pénze lenne, akkor ugyanannyi pénze lenne, mint Sárinak. Sárinak 650 Ft-ja van. Mennyi pénze van Orsinak?

30) Ha Orsinak 100 Ft-tal kevesebb pénze lenne, akkor ugyanannyi pénze lenne mint Sárinak. Sárinak 650 Ft-ja van. Mennyi pénze van Orsinak?

31) Ha Orsi odaadna 100 Ft-ot Sárinak, akkor ugyanannyi pénzük lenne. Sárinak 650 Ft-ja van. Mennyi pénze van Orsinak?

32) Nekerese városnak háromszor annyi lakója van, mint Sohavárnak. Sohavárnak 300 lakója van. Mennyi lakója van Nekerese-nek?

33) Nekerese városnak háromszor annyi lakója van, mint Sohavárnak. Nekerese-nek 300 lakója van. Mennyi lakója van Sohavárnak?

34) A fürdőkádba harmadannyi víz fér, mint a felfújható medencébe. A fürdőkádba 90 liter víz fér. Mennyi víz fér a felfújható medencébe?

35) A vödörbe harmadannyi víz fér, mint a dézsába. A dézsába 27 liter víz fér. Mennyi víz fér a vödörbe?

36) Ha négyszer több pénzem lenne, mint amennyi most van, akkor 1000 Ft-om lenne. Mennyi pénzem van most?

37) Most 220 Ft-om van. Ha négyszer több pénzem lenne, mint most, akkor mennyi pénzem lenne?

38) A könyvesbolt kirakatában láttam egy könyvet Afrika vadállatairól 670 Ft-ért. Ha 150 Ft-tal több pénzem lett volna, megvehettem volna. Mennyi pénz volt nálam?

39) Karcsi és Gyuri együtt rendeznek szülinapot. Karcsi 10 gyereket hívott, Gyuri 12 gyereket. Hány gyereket hívhattak?

40) Két fa között, amelyek egymástól 5 m távolságra vannak, kötelet szeretnénk kifeszíteni. Sajnos, csak 1 m hosszú kötélrészletek vannak. Hányat kell ezekből egymáshoz kötni?

41) A pohárban már van 2 dl tej. Hozzáöntünk még egy deciliter tejet. Mennyi tej lesz a pohárban?

42) Egy buszon 40 ember utazik. Az egyik megállóban leszállnak 10-en. Hány ember marad a buszon?

43) 300 évvel ezelőtt egy királyfi 5 évvel volt idősebb a húgánál. A húga akkor 13 éves volt. Hány éves volt a királyfi?

44) A boltos két kisebb ládából egy nagyobb ládába rakja az almát. Az egyik ládából 40, a másikkól 75 almát rak a nagy ládába. Mennyi alma van a nagy ládában?

45) Az egyik kerékpáron ketten utaznak, a másikon háromszor annyian. Hányan utaznak a második kerékpáron?

46) Zsoltinak 10 léggömbje van, négyszer annyi, mint Klárinak. Hány léggömbje van Klárinak?

47) Ha Pista egy év alatt 3 cm-t nő, akkor mennyit nő 50 év alatt?

48) A 22 fős osztály tanulóit 4 egyenlő létszámú csoportba osztottuk be. Hányan voltak egy csoportban.

49) A pohárba 1 dl-rel több tej fér, mint amennyi most benne van. 3 dl-es a pohár. Most mennyi tej van benne?

50) Az egyik megállóban senki nem szállt le a buszról, de fölszálltak négyen. Most 40 ember utazik a buszon. Hányan voltak a buszon korábban?

51) Budapeستől 7 km-re van egy bolt, amelyben 3 polcon sorakoznak különféle csokik. A Boci csoki 20 Ft-tal többbe kerül, mint a Tibi csoki. A Boci csoki ára 200 Ft. Mennyibe kerül a Tibi csoki?

52) Az akváriumban 25 hal úszkál, amelyek között bölcsőszájú halból 3-mal több van, mint páncélosharcsából. Két páncélosharcsa van az akváriumban. Hány bölcsőszájú hal van benne?

53) A nagy turistabuszba ötször annyian férnek, mint a kisbuszba. A nagy turistabusz 45 embert tud szállítani. Hányan férnek a kisbuszba?

54) Csilla 15 tábla csokit kapott a születésnapjára, háromszor többet, mint Lali. Hány tábla csokit kapott Lali?

55) Laci feleannyi idő alatt megoldotta a házi feladatot, mint a kisöccse. A kisöccsének 26 percig tartott megoldani a házi feladatot. Mennyi idő kellett Lacinak?

56) Gyuszi fele olyan magas hegyre mászott föl a nyáron, mint Feri. Gyuszi egy 507 méter magas hegyre jutott föl. Milyen magas hegyre mászott föl Feri?

57) Jóskának 70-nel több üveggolyója van, mint Timinek. Timinek 150 üveggolyója van. Hány üveggolyója van Jóskának?

58) 150 pokémonos matricám közül elvesztettem 70-et. Hány pokémonos matricám van most?

59) Ha 70-nel több játék katonám lenne, akkor 150 lenne. Hány játék katonám van?

60) A matematika versenyen 150 perc jut a feladatok megoldására. Még 70 percem van hátra. Hány perce dolgozom?

61) Találjatok ki olyan feladatot, amelyben a 70 és a 150 számok szerepelnek, és ami összeadással vagy kivonással oldható meg!

62) Egy kisbusz a sofőrt és még 8 utast tud szállítani. A focicsapat 28 szurkolóját hány autóbusz tudja elszállítani?

63) 28 liter levest készítettek az iskolai konyhán, amit 8 egyforma edénybe öntöttek bele, és mindegyik edénybe ugyanannyi leves került. Hány liter leves került egy edénybe?

64) Egy kézilabdacsapat 7 játékosból áll. 30 gyerek hány kézilabdacsapatot tud alakítani?

65) 38 virághagymát vett Zsuzsi anyukája. A virághagymákat úgy ülteti a kertbe, hogy minden sorba 8 kerüljön. Hány virághagymát nem fog így a kertbe ültetni?

66) Tavaly 5 zebra volt az állatkertben, az idén hoztak még négyet. Ha jövőre is hoznak még négyet, akkor hány zebra lesz az állatkertben?

67) Nagymama 15 palacsintát süttött. Az unokák megettek kilencet. A nagymama ezután süttött még hármat. Hány palacsinta maradt?

68) Reggel 1450 Ft-om volt. Délelőtt elköltöttem 230 Ft-ot, délután pedig még 100 Ft-ot. Mennyi pénzem maradt estére?

69) Viki 12 hógolyót gyúrt, Tomi pedig kilencet. A célbadobáshoz 15 hógolyót dobtak el. Mennyi hógolyójuk maradt?

70) Zoli 133 cm magas, 10 cm-rel alacsonyabb, mint Kinga. Ha Kinga 3 cm-rel magasabb lenne, akkor ugyanolyan magas lenne, mint Sanyi. Hány cm magas Sanyi?

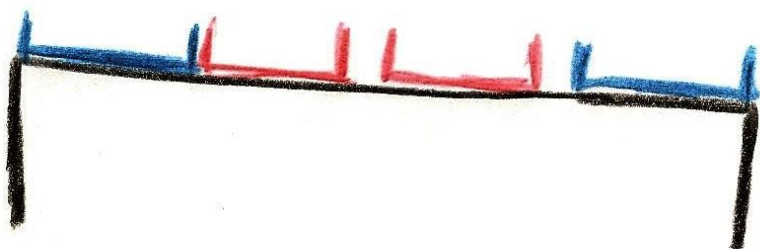
71) Délelőtt 15 oldallal többet olvastam el a könyvből, mint délután, de 10 oldallal kevesebbet, mint tegnap. Mennyit olvastam tegnap óta, ha délután 10 oldalt olvastam?

72) A polcomon három sorban vannak a könyvek. Az alsó soron tízzel több könyv van, mint a felsőn, a középsőn pedig négyvel kevesebb, mint az alsón. A felső polcon csak egy könyv van.

73) A távolugróverseny győztese 12 cm-rel messzebbre ugrott, mint a második helyezett, aki 3 cm-rel előzte meg a harmadik helyezettet. A harmadik helyezett eredménye 300 cm volt.

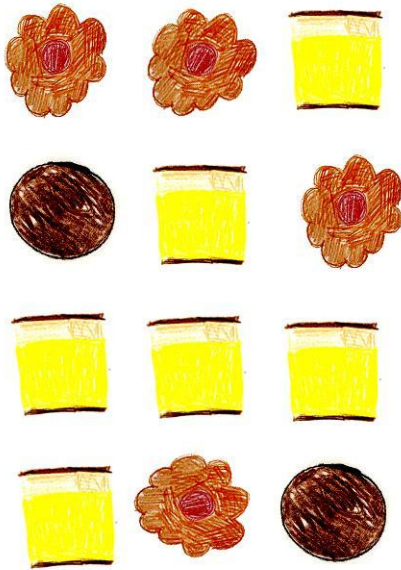
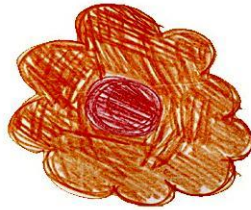
A szemléltetéshez javasolt írásvetítő-fóliák anyaga

1. sz. fólia

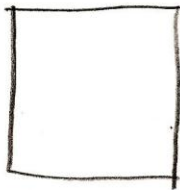


András
Csaba
Panni
Eva

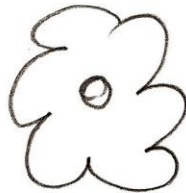
2. sz. fólia



francia krémes



linzer



kakaószagos



$\frac{3 \square}{\square \square \square}$

$\frac{2 \square}{\square \square \text{flower}} \square \square \text{circle}$

$\frac{1 \square}{\square \text{flower} \text{flower}} \square \text{flower} \text{circle} \square \text{circle} \text{circle}$

$\frac{\text{nem vizek} \square}{\text{flower} \text{flower} \text{flower}}$

$\text{flower} \text{flower} \text{circle} \text{flower} \text{circle} \text{circle} \text{circle} \text{circle} \text{circle} \text{circle}$