

1. Miért fontos az arányossági gondolkodás?

Az arányossági gondolkodás a matematikai gondolkodás egyik legfontosabb összetevője, amely jóval túlmutat egyetlen tananyagrészen vagy számítási eljáráson. Nem egyszerűen az aránypárok megoldásának képességét jelenti, hanem olyan összetett gondolkodási formát, amelynek középpontjában a mennyiségek közötti kapcsolatok felismerése, értelmezése és általánosítása áll. A tanulók akkor rendelkeznek fejlett arányossági gondolkodással, ha nem elszigetelt számadatokat látnak, hanem észreveszik, hogyan változnak együtt a mennyiségek, és milyen állandó kapcsolat húzódik meg közöttük.

Az arányossági gondolkodás kiemelt jelentőségét az adja, hogy számos matematikai terület alapját képezi. A törtek értelmezése, a százalékszámítás, a mértékegységek közötti átváltás, a sebesség fogalma, a hasonlóság, a lineáris függvények, sőt az algebrai gondolkodás számos eleme is feltételezi az arányok megértését. Boyer és Levine (2015) szerint az arányossági gondolkodás olyan alapvető pszichikus struktúra, amely a racionális mennyiségek közötti multiplikatív rész-egész kapcsolatok megértésére épül, és ezáltal meghatározó szerepet játszik több matematikai tartalom összekapcsolásában.

Az arányossági gondolkodás jelentősége azonban nem korlátozódik a matematika tantárgyra. A mindennapi élet számos helyzetében használjuk anélkül, hogy tudatosan gondolnánk rá. Egy recept módosításakor, amikor négy személy helyett hat személyre szeretnénk főzni, arányosan változtatjuk az összetevők mennyiségét. Vásárláskor összehasonlítjuk a különböző kiserelések ár-érték arányát, figyelembe vesszük az akciók mértékét, és becsléseket végzünk. Az üzemanyag-fogyasztás, a sebesség, az egészséges táplálkozás során figyelt tápanyagarányok vagy akár a pénzügyi döntések is feltételezik az arányos gondolkodás valamilyen formáját.

Nem véletlen, hogy az OECD a matematikai műveltség egyik alapvető összetevőjeként tekint az arányossági gondolkodásra. A PISA 2022 mérési keretrendszere szerint a matematikai műveltség annak képessége, hogy az egyén matematikai módon érveljen, problémákat matematikailag megfogalmazzon, megoldjon és értelmezzen különböző valós helyzetekben. Az arányossági gondolkodás a „Mennyiség” tartalmi terület egyik központi eleme, amely magában foglalja a mennyiségek közötti kapcsolatok megértését, az arányok és százalékok használatát, valamint az arányos összefüggések alkalmazását különböző kontextusokban.

A kutatások ugyanakkor arra is rámutatnak, hogy az arányossági gondolkodás fejlődése hosszú és összetett folyamat. Tourniaire és Pulos (1985) szerint az arányos gondolkodás az egyik legkésőbb kialakuló matematikai képesség, amelynek fejlődése gyakran még a középiskolás években sem tekinthető befejezettnek. A tanulók sokszor képesek egy-egy típusfeladatot

megoldani, de nehezen alkalmazzák tudásukat új helyzetekben. Előfordul, hogy a helyes megoldás mögött nincs valódi megértés, csupán egy megtanult algoritmus áll.

Richard Skemp (1976) ezt a különbséget az instrumentális és a relációs megértés fogalmával írta le. Instrumentális megértésről beszélünk akkor, amikor a tanuló tudja, mit kell csinálnia, de nem érti, miért működik az adott eljárás. Relációs megértés esetén azonban nemcsak a műveletet képes végrehajtani, hanem érti a mögötte álló összefüggéseket is, és tudását új helyzetekben is alkalmazni tudja. Az arányossági gondolkodás fejlesztésének egyik legfontosabb célja éppen az, hogy a tanulók az instrumentális tudástól eljussanak a relációs megértésig.

A tanári gyakorlatban ez azt jelenti, hogy az arányosság tanítása nem korlátozódhat a szabályok és algoritmusok bemutatására. A tanulóknak lehetőséget kell adni arra, hogy különböző reprezentációk segítségével fedezzék fel az összefüggéseket, összehasonlítsák a mennyiségeket, megfogalmazzák saját gondolataikat és megvitassák egymás stratégiáit.

A jelen fejlesztő program is ebből a szemléletből indul ki. Az a célja, hogy az arányosságot ne egy elszigetelt matematikai témaként kezelje, hanem olyan gondolkodási formaként, amely fokozatosan épül fel, és amelynek megértése a matematika számos további területének tanulását alapozza meg. A hangsúly nem a szabályok gyors alkalmazásán, hanem az összefüggések felismerésén, a vizuális reprezentációkon, a mennyiségek közötti kapcsolatok értelmezésén és a tanulók saját gondolkodási folyamatainak tudatosításán van.

Az arányosság tehát nem egyszerűen egy tananyag, amelyet meg kell tanítani. Sokkal inkább olyan gondolkodási eszköz, amely segít eligazodni a matematika világában és a mindennapi élet számos helyzetében. Fejlesztése ezért nem csupán a matematikaórák egyik feladata, hanem a matematikai műveltség kialakításának egyik legfontosabb eleme.

2. Az arányossági gondolkodás fejlődése és a reprezentációk szerepe

Az arányossági gondolkodás a matematikai gondolkodás egyik legösszetettebb és legfontosabb területe. Nem egyetlen eljárás vagy algoritmus elsajátítását jelenti, hanem olyan összetett kognitív képességet, amely a mennyiségek közötti multiplikatív kapcsolatok felismerésére, értelmezésére és általánosítására épül (Vergnaud, 1983; Lamon, 2005; Dole, 2010).

A szakirodalom egyetért abban, hogy az arányossági gondolkodás fejlődése hosszú folyamat, amelynek során a tanulók fokozatosan jutnak el az additív gondolkodástól a multiplikatív gondolkodásig (Vergnaud, 1983; Lamon, 2005; Wright, 2011). Az additív gondolkodás során a tanulók elsősorban a mennyiségek közötti abszolút különbségekre figyelnek: az egyik több, a másik kevesebb, az egyik kettővel nagyobb vagy hárommal kisebb, mint a másik. A

multiplikatív gondolkodásban ezzel szemben már a mennyiségek közötti szorzásos kapcsolat kerül előtérbe: a tanulók azt vizsgálják, hogy az egyik mennyiség hányszorosa vagy hányadrésze a másiknak.

A saját kutatásunk eredményei ugyanakkor arra utalnak, hogy az additív és multiplikatív gondolkodás között létezik egy átmeneti szint, amely fontos szerepet játszhat az arányossági gondolkodás fejlődésében. A tanulók egy része már nem pusztán az abszolút különbségeket veszi figyelembe, ugyanakkor még nem alkalmaz stabil multiplikatív stratégiákat. A változásokat az eredeti mennyiséghez viszonyítva értelmezik, vagyis ugyanazt az abszolút különbséget másként ítélik meg attól függően, hogy milyen nagyságú mennyiségek között jelenik meg. Ezt a gondolkodási formát relatív gondolkodásnak nevezzük.

A relatív gondolkodás megjelenése azért különösen fontos, mert átmenetet képez az additív és a multiplikatív gondolkodás között. A tanulók ilyenkor már érzékelik, hogy a változások értelmezéséhez nem elegendő a különbségek nagyságát figyelembe venni, hanem szükség van a viszonyításra is. Ez a felismerés előkészítheti a későbbi multiplikatív és arányossági gondolkodás kialakulását. A fejlesztő program feladatai ezért tudatosan építenek olyan helyzetekre, amelyekben a tanulók összehasonlításokat végeznek, megvitatják a különböző stratégiákat, és fokozatosan eljutnak a relatív összehasonlítások alkalmazásáig.

Kutatásunk másik fontos eredménye a diszkrét és folytonos reprezentációk közötti különbségek feltárása volt. A tanulók teljesítménye egyértelműen jobb volt a diszkrét mennyiségeket tartalmazó feladatok esetében, mint a folytonos reprezentációknál. Ez az eredmény összhangban áll a nemzetközi szakirodalommal, amely szerint a megszámlálható objektumokkal megadott helyzetek könnyebben feldolgozhatók, mint azok a feladatok, amelyekben a mennyiségek folytonos egészként jelennek meg (Vanluydt et al., 2021).

A diszkrét reprezentációk esetében a mennyiségek jól elkülöníthető elemekből állnak, amelyek megszámlálhatók és közvetlenül összehasonlíthatók. A tanulók támaszkodhatnak a számlálásra, az elemek közötti különbségek meghatározására vagy az ismételt összeadásra. A folytonos reprezentációk, például sávmodellek, téglalapok vagy területi modellek esetében azonban ezek a stratégiák kevésbé alkalmazhatók. A tanulóknak a részek és az egész kapcsolatát, az arányokat és a mennyiségek közötti viszonyokat kell értelmezniük, ami összetettebb gondolkodási folyamatokat igényel.

Az online diagnosztikus vizsgálatunk eredményei azt mutatták, hogy a tanulók teljesítménye nemcsak az életkor, hanem a reprezentáció típusa szerint is jelentősen eltért. Ugyanaz a tanuló sikeresen oldhatott meg egy diszkrét reprezentációban megjelenő feladatot, miközben a matematikailag ekvivalens, folytonos reprezentációban megadott feladat nehézséget okozott

számára. Ez arra utal, hogy a reprezentáció típusa nem pusztán a feladat külső megjelenési formája, hanem alapvetően meghatározza azt is, hogy a tanulók milyen stratégiákat alkalmaznak, és milyen összefüggéseket vesznek észre.

A reprezentációk jelentőségét számos kutatás hangsúlyozza. Duval (2006) szerint a matematikai megértés egyik alapfeltétele a különböző reprezentációs rendszerek közötti átjárás képessége. Goldin és Kaput (1996) a reprezentációkat a matematikai gondolkodás szervező elemeinek tekintik, amelyek nem csupán közvetítik a tudást, hanem alakítják is a gondolkodási folyamatokat. Saját eredményeink szintén azt támasztják alá, hogy a reprezentáció nem egyszerű szemléltető eszköz, hanem a matematikai gondolkodás egyik meghatározó tényezője. A jelen fejlesztő program ezért tudatosan épít a különböző reprezentációkra. A cél nem egyetlen modell vagy eljárás megtanítása, hanem annak támogatása, hogy a tanulók ugyanazt az arányos kapcsolatot többféle helyzetben és többféle reprezentációban is felismerjék. A fejlesztés során kiemelt figyelmet fordítunk a relatív gondolkodás megjelenésére, valamint arra, hogy a tanulók fokozatosan átlépjenek a diszkrét mennyiségek világából a folytonos reprezentációk értelmezése felé. E két terület fejlesztése kulcsfontosságú az arányossági gondolkodás mélyebb megértéséhez, és meghatározó szerepet játszik a későbbi matematikai tanulmányok sikerességében.

3. A fejlesztő program alapelvei

A fejlesztő program kialakítása során arra törekedtünk, hogy az arányossági gondolkodás fejlesztése ne egy-egy eljárás vagy algoritmus megtanítására épüljön, hanem a tanulók gondolkodásának fokozatos átalakítására. A program felépítését egyrészt a nemzetközi szakirodalom eredményei, másrészt a saját kutatásunk során szerzett tapasztalatok határozták meg.

A kutatások szerint az arányosság megértése jóval megelőzi a formális eljárások alkalmazását, és a tanulók gondolkodásának fejlődése hosszú időn keresztül zajlik (Vergnaud, 1983; Lamon, 2005; Wright, 2011). A program ezért olyan feladatokra épül, amelyekben a tanulók először mennyiségeket hasonlítanak össze, kapcsolatokat keresnek és különböző stratégiákat próbálnak ki. A hangsúly nem a gyors számoláson, hanem az összefüggések felismerésén van.

A második alapelv a relatív gondolkodás tudatos fejlesztése. Kutatásunk során azt tapasztaltuk, hogy az additív és multiplikatív gondolkodás között megjelenik egy átmeneti szint, amelyet relatív gondolkodásként írhatunk le. A tanulók már nem kizárólag az abszolút különbségekre figyelnek, ugyanakkor még nem alkalmaznak stabil multiplikatív stratégiákat. A változásokat az eredeti mennyiségekhez viszonyítva értelmezik, és érzékelik, hogy ugyanaz az abszolút

eltérés eltérő jelentőségű lehet különböző helyzetekben. A fejlesztő program ezért tudatosan épít olyan problémákra, amelyekben a tanulók összehasonlítanak, érvelnek és különböző szempontok szerint értékelnek mennyiségeket. Célunk nem az, hogy a relatív gondolkodást külön fogalomként tanítsuk, hanem az, hogy a tanulók számára természetessé váljon a viszonyítás és a mennyiségek kapcsolatának vizsgálata.

A harmadik alapelv a különböző reprezentációk tudatos használata. A saját kutatásunk egyik legfontosabb eredménye az volt, hogy a tanulók a diszkrét mennyiségeket tartalmazó feladatokon lényegesen jobb eredményt értek el, mint a folytonos mennyiségeket tartalmazó feladatokon. A diszkrét reprezentációk, például korongok, golyók vagy más megszámlálható objektumok esetében a tanulók könnyebben azonosítják a mennyiségek közötti kapcsolatokat, és gyakrabban alkalmaznak sikeres megoldási stratégiákat. A folytonos reprezentációk esetében azonban a számlálás lehetősége háttérbe szorul, a tanulóknak a részek és az egész kapcsolatát, valamint a mennyiségek közötti viszonyokat kell értelmezniük, ami jelentősen nagyobb kognitív terhelést jelent.

Ez az eredmény különösen fontos a tanári gyakorlat szempontjából. A reprezentáció nem csupán a feladat külső megjelenési formája, hanem alapvetően meghatározza azt is, hogy a tanulók milyen stratégiákat alkalmaznak és milyen összefüggéseket vesznek észre. Duval (2006) szerint a matematikai megértés egyik legfontosabb feltétele a különböző reprezentációs rendszerek közötti átjárás képessége. Goldin és Kaput (1996) pedig arra hívják fel a figyelmet, hogy a reprezentációk nem egyszerűen közvetítik a tudást, hanem alakítják is a gondolkodási folyamatokat. Ennek megfelelően a fejlesztő programban a reprezentációk nem illusztrációként jelennek meg, hanem a gondolkodás támogatásának eszközeiként.

A negyedik alapelv a többféle stratégia elfogadása és megvitatása. Az arányossági gondolkodás fejlődése során a tanulók eltérő utakat járnak be, és ugyanazt a problémát különböző módokon oldhatják meg. Az arányossági problémák megoldása során az additív, az építkező, a skaláris vagy a funkcionális stratégiák egyaránt megjelenhetnek. A fejlesztés során ezért fontosnak tartjuk, hogy a tanulók ne csupán megoldják a feladatokat, hanem megosszák gondolataikat, összehasonlítsák egymás stratégiáit és érveljenek saját megoldásaik mellett. A közös gondolkodás lehetőséget teremt arra, hogy a tanulók tudatosítsák saját stratégiáikat, és fokozatosan egyre fejlettebb gondolkodási formákat alakítsanak ki.

A fejlesztő program ötödik alapelve, hogy a tanár szerepe elsősorban nem az ismeretközlés, hanem a gondolkodási folyamatok támogatása. A tanár feladata olyan helyzetek teremtése, amelyekben a tanulók önállóan fedezhetik fel az összefüggéseket, megfogalmazhatják saját elképzeléseiket, és lehetőségük van a különböző megoldások összehasonlítására. A tanulók

gondolkodásának megértése, a különböző stratégiák felismerése és ezek tudatos fejlesztése legalább olyan fontos, mint a helyes megoldás megtalálása.

A következő fejezetben bemutatott hat órás fejlesztő program ezekre az alapelvekre épül. A feladatok és tevékenységek kiválasztását a szakirodalmi eredmények, valamint a saját kutatásunk során feltárt gondolkodási sajátosságok vezérelték. A cél nem egy újabb módszer vagy eljárás megtanítása, hanem annak támogatása, hogy a tanulók fokozatosan eljussanak az arányossági gondolkodás mélyebb, rugalmasabb és tudatosabb formáihoz.

4. Hogyan használjuk ezt a fejlesztő programot?

A fejlesztő program hat egymásra épülő tanórából áll, amelyek középpontjában az arányossági gondolkodás fokozatos fejlesztése áll. Az órák felépítését a nemzetközi szakirodalom eredményei, valamint saját kutatásunk tapasztalatai határozták meg. A feladatok sorrendje tudatos: a kezdeti, intuitív összehasonlításoktól indulva fokozatosan vezeti el a tanulókat a multiplikatív kapcsolatok felismeréséhez és az arányossági gondolkodás mélyebb megértéséhez.

A fejlesztő program nem egy új algoritmus vagy eljárás megtanítását tűzi ki célul. Nem az a legfontosabb, hogy a tanulók gyorsan és hibátlanul oldják meg a feladatokat, hanem az, hogy észrevegyék a mennyiségek közötti kapcsolatokat, megfogalmazzák saját gondolataikat, és képesek legyenek különböző stratégiák összehasonlítására. A feladatok ezért gyakran nyitottak, többféle megoldást is lehetővé tesznek, és a beszélgetésnek, érvelésnek, közös gondolkodásnak ugyanolyan fontos szerepet szánunk, mint a számolásnak.

Az órák során érdemes időt hagyni arra, hogy a tanulók önállóan próbálkozzanak, megosszák elképzeléseiket és megvitassák egymás megoldásait. Nem szükséges minden esetben a legrövidebb vagy leghatékonyabb megoldást keresni. Az additív stratégiák megjelenése természetes része a fejlődésnek, és fontos információt hordoz arról, hogy a tanulók gondolkodása milyen szinten áll. A cél nem ezek azonnali kijavítása, hanem annak elősegítése, hogy a tanulók fokozatosan maguk fedezzék fel a mennyiségek közötti összefüggéseket.

A feladatok megoldása során a tanulók különböző reprezentációkkal találkoznak: megszámlálható objektumokkal, ábrákkal, sávmodellekkel, folytonos mennyiségekkel és szöveges helyzetekkel. Ezek nem egymás helyettesítői, hanem egymást kiegészítő eszközök. A kutatás eredményei azt mutatták, hogy a reprezentáció típusa jelentősen befolyásolja a tanulók teljesítményét és az általuk alkalmazott stratégiákat, ezért fontos, hogy a tanulók ugyanazt az összefüggést többféle formában is megtapasztalják. A különböző reprezentációk közötti kapcsolatok felismerése hozzájárul az arányossági gondolkodás mélyebb megértéséhez.

Az órák egymásra épülnek, ezért javasolt az eredeti sorrend megtartása. Ugyanakkor a feladatok és tevékenységek önállóan is alkalmazhatók, ha a tanár egy-egy részterületet szeretne hangsúlyosabban fejleszteni vagy egy adott gondolkodási stratégiát szeretne előhívni. A fejlesztő program nem lezárt módszertani receptként kíván működni, hanem olyan eszköztárként, amely a tanár szakmai döntéseit támogatja, és lehetőséget teremt arra, hogy a tanulók az arányossági gondolkodást egyre mélyebben és egyre tudatosabban építsék fel.

Fontos hangsúlyozni, hogy a fejlődés nem minden tanulónál azonos ütemben zajlik. Az arányossági gondolkodás összetett képesség, amelynek kialakulásához időre, változatos tapasztalatokra és sokféle problémaszituációra van szükség. A különböző megoldási utak, az esetleges tévedések és a bizonytalanságok nem a tanulási folyamat kudarcát, hanem annak természetes velejáróit jelentik. A fejlesztő program célja ezért nem egyetlen helyes stratégia kialakítása, hanem annak támogatása, hogy a tanulók egyre tudatosabban és rugalmasabban gondolkodjanak a mennyiségek közötti kapcsolatokról.

5. Mit várhatunk a tanulóktól?

A fejlesztő program során a tanulók gondolkodása eltérő ütemben fejlődhet. Előfordulhat, hogy egyesek már a kezdetektől multiplikatív stratégiákat alkalmaznak, míg mások hosszabb ideig additív vagy relatív gondolkodásra támaszkodnak. Ez a különbség természetes jelenség, amely nem feltétlenül a képességek eltérését, hanem a fejlődés eltérő ütemét tükrözi.

A feladatok megoldása során nem várható el, hogy minden tanuló ugyanazt a stratégiát használja, vagy minden esetben azonnal megtalálja a leghatékonyabb megoldást. A fejlesztő program célja nem egyetlen eljárás elsajátítása, hanem annak támogatása, hogy a tanulók egyre tudatosabban figyeljenek a mennyiségek közötti kapcsolatokra, egyre rugalmasabban használják a különböző reprezentációkat, és fokozatosan eljussanak az arányossági gondolkodás fejlettebb formáihoz.

A fejlődés egyik fontos jele lehet, ha a tanulók egyre többféle megoldási stratégiát próbálnak ki, képesek megindokolni saját gondolataikat, vagy felismerik ugyanannak a problémának az azonosságát különböző reprezentációkban. Ezek a változások gyakran fontosabbak, mint az, hogy egy adott feladatot milyen gyorsan vagy milyen formális eljárással oldanak meg.

Az óratervekben megadott időkeretek és tevékenységek ajánlásokként értelmezendők. Az arányossági gondolkodás fejlesztése során különösen nehéz előre megjósolni, hogy a tanulónak mennyi időre lesz szükségük egy-egy probléma feldolgozásához. Egy váratlan ötlet, egy érdekes vita vagy egy új stratégia megjelenése jelentősen befolyásolhatja az óra menetét.

Éppen ezért természetesnek tekinthető, ha egyes feladatokra több idő jut, míg más tevékenységekre kevesebb, vagy akár teljesen kimaradnak.

A fejlesztő program nem egy merev forgatókönyv, amelyet minden körülmények között végre kell hajtani. Sokkal inkább olyan feladatgyűjtemény és módszertani ajánlás, amely a tanár szakmai döntéseit támogatja. Nem jelent problémát, ha egy óra során nem sikerül minden tervezett tevékenységet elvégezni, vagy ha a tanár a csoport igényeihez igazodva egyes részeket elhagy, esetleg más feladatokkal helyettesít.

Ugyanakkor az órák sorrendjének megtartását fontosnak tartjuk. Az egyes tevékenységek és problémák nem önálló egységekként, hanem egymásra épülő fejlesztési folyamat részeként kerültek a programba. A feladatok sorrendje a tanulók gondolkodásának várható fejlődését követi: az intuitív összehasonlításoktól a relatív gondolkodás megjelenésén át a multiplikatív kapcsolatok felismeréséig és az arányossági összefüggések tudatos alkalmazásáig vezet. Ezért, bár az egyes feladatok szabadon alakíthatók, az órák egymásra épülésének megőrzése hozzájárulhat a fejlesztés eredményességéhez.

A használt anyagokkal kapcsolatban felmerült kérdés, kérdés esetében vagy egyes feladatok elérése érdekében kérem bátran keressenek a [berezkildiko@gmail.com](mailto:bereczkildiko@gmail.com) címen.

Irodalom:

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). Macmillan.

Bereczki, I., & Csíkos, C. (2024). Two more or twice as much? Proportional reasoning strategies in grades 5 to 7. In T. Evans, O. Marmur, J. Hunter, G. Leach, & J. Jhagroo (Eds.), *Proceedings of the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Research Reports, Vol. 4). Auckland, Aotearoa New Zealand: PME.

Bereczki, I., & Csíkos, C. (2026). Should we draw, or should we work with numbers? Investigating proportional reasoning among 5th to 7th graders. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 24(1)

Bereczki, I., Biró, F., Szitányi, J., Turzó-Sovák, N., & Csíkos, C. (2026). Action research on and for word problem solving: How can Pólya's problem-solving steps be interpreted and enriched in an elementary school? *The Journal of Educational Research*, 1–12.
<https://doi.org/10.1080/00220671.2026.2622326>

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental Psychology*, 51(5), 615–620.

- Dole, S. (2010). Making connections to the big ideas in mathematics: Promoting proportional reasoning. In B. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education* (pp. 83–92). MERGA.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.
- Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397–430). Lawrence Erlbaum Associates.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). Macmillan.
- Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). Lawrence Erlbaum Associates.
- OECD. (2023). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. OECD Publishing.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181–204.
- Vanluydt, E., De Bock, D., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2021). Understanding the role of continuous and discrete representations in proportional reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(3), 345–366.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). Academic Press.
- Wright, R. J. (2011). *Developing number knowledge: Assessment, teaching and intervention with 7–11-year-olds* (2nd ed.). SAGE Publications.