

# 1. ÓRATERV

**Műveltségi terület:** Matematika

**Tantárgy:** Matematika

**Osztály:** 7.b

**Az óra témája:** Arányok bevezetése

**Az óra cél-és feladatrendszere:**

**Fejlesztendő attitűd:** Önbizalom fejlesztése, önálló gondolatok megfogalmazásának bátorsága. Más nézőpont elfogadása.

**Készségek, képességek:** A matematikai gondolkodás, a modellalkotás, a modellek érvényességi körének eldöntése. A matematikai és a grafikus reprezentáció képességének fejlesztése.

**Elérendő fejlesztési szint, tudásszint:** Az arányok megismerése, megértése, azonos értékű arányok felismerése, arányok meghatározása.

**Az óra célja,** hogy a tanulók megértésék az arány fogalmát, az arányok egyenlőségét és az arányérték kiszámítását.

**Az óra didaktikai feladatai:** Új ismeret feldolgozása, alkalmazás

**Tantárgyi kapcsolatok:** biológia, művészetek

**Felhasznált források:**

- Degrande, T., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Open word problems: taking the additive or the multiplicative road?. *ZDM, 50*, 91-102.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Vanluydt, E., De Keyser, L., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2023). Stimulating early proportional reasoning: an intervention study in second graders. *European Journal of Psychology of Education, 1-22*.
- [https://www.kooperativ.hu/matematika/3\\_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2\\_A\\_t%C3%ADpus/6-%C3%A9vfolyam/2\\_Tan%C3%A1ri%20modulok/067-t%C3%A9mak%C3%B6r/AMAT\\_0671\\_%20tan%C3%A1r.pdf](https://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/6-%C3%A9vfolyam/2_Tan%C3%A1ri%20modulok/067-t%C3%A9mak%C3%B6r/AMAT_0671_%20tan%C3%A1r.pdf)

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia		
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök

3 perc	1. Hívogató, elcsendesedés Óraszám és cím felírása a füzetbe: Több, kevesebb	Ráhangolódás	Frontális	Kivetítő, füzet
5 perc,	2. Pénzosztás feladat	Irányított beszélgetés	Frontális	Papírpénz
2 perc	3. Beszélgetés az arányokról	Előzetes tudás aktiválása, fogalmi előhívás	Frontális	
5 perc	4. Arány, arányosság olvasmány (ld.: csatolmány) PPT	Ismeretközlés, szemléltetés, irányított feldolgozás	Frontális	Kivetítő
2 perc	5. Arányok a matematikában Példák gyűjtése	Aktiválás	Frontális Egyéni	Kivetítő, füzet
3 perc	6. Arányok felírása, megbeszélése	Munkáltatás	Páros munka	
2 perc	7. Arányok felírása több féleképpen	Megbeszélés	Frontális	
3 perc	8. Csoportalakítás	Szervezés, differenciálás	Egyéni munka	Kártyák
5 perc	9. Differenciált feladatok megoldása	Kooperatív tanulás	Csoportmunka	Feladatok
5 perc	10. A csoportok munkájának megbeszélése, összehasonlítása, tapasztalatok egyeztetése.	Érvelés, reflektálás	Frontális	
3 perc	11. A természet számokban video	Szemléltetés, motiváció, kapcsolatterem tés	Frontális	Kivetítő
1 perc	12. 12.Dicséret. Piros pont, ha jó a megoldás	Értékelés, pozitív megerősítés	Egyéni	
1 perc,	13. Házi feladat: Keress 3 példát hétköznapi arányokra, vagy gyűjts képeket a művészetben fellelhető arányra.	Reflektív feladatadás	Frontális	Tábla

Az óra felépítése:

## 1. HÍVOGATÓ

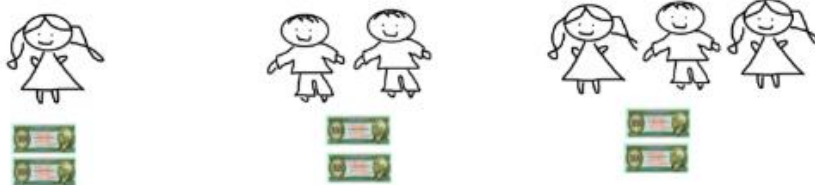
A mi iskolánkban komoly zene indítja az órát, utána 1 perces ráhangolódo gyakorlattal kezdünk. Helyette jelentés.

Az óra indítása során a ráhangolódo nem pusztán szervezési funkciót tölt be, hanem a tanulói figyelem tudatos irányítását is szolgálja. A csendes kezdés és a rövid ráhangolódo gyakorlat lehetőséget teremt arra, hogy a tanulók kilépjenek a hétköznapi gondolkodásból, és egy fókuszáltabb, reflektívebb állapotba kerüljenek. Érdeemes már itt is jelezni, hogy az órán nem egyetlen helyes válasz megtalálása lesz a cél, hanem különböző gondolkodási utak feltárása.

## 2. „PÉNZOSZTÁS”

Egy hétköznapi példa kapcsán (Pénzosztás) rávezetjük a tanulókat az igazságos osztozkodás fogalmára, majd beszélgetünk velük arról, hogy mit is jelent a mindennapi életben az arány fogalma, az arány, milyen szinonimái vannak. Például amikor a vétség nagyságával arányos büntetésről beszélünk, az arányos jelzővel annak igazságos voltát akarjuk kifejezni. Az aránylag kifejezést sokszor a viszonylag szóval azonos értelemben használjuk. Mindennapi példákon keresztül világítunk rá a fogalomra, valamint a művészetből vett alkotásokkal foglalkozunk.

Hívjunk ki 6 tanulókat és osszuk őket 1, 2, 3 fős csoportokba. Meséljük el: sokat dolgozott ez a három csapat egy projekten, minden résztvevő ugyanannyit dolgozott, ezért szeretnék őket igazságosan kifizetni. Úgy gondoltuk, hogy a következő módon fizetnénk őket: minden csoportnak adjunk 2 db „ezrest”.

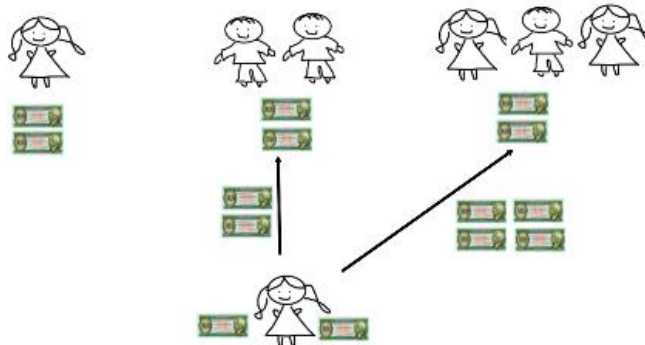
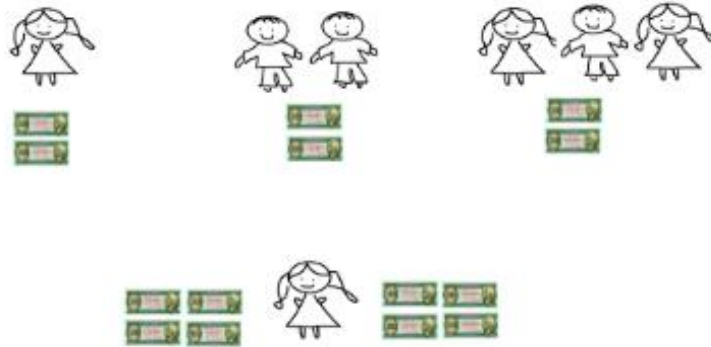


Tegyük fel az osztálynak a következő kérdéseket:

- *Most mindenkinek ugyanannyi pénze van?*

- *Ez igazságos így? Miért nem?*

Adjunk 8 db ezrest egy tanulónak (aki nem a csoportok tagja). Kérjük meg, hogy ossza el úgy a pénzt, hogy igazságos legyen mindenkinél a pénzösszeg. (Nem kell minden pénzt kiosztania, és nem kell minden csoportnak adnia, úgy ossza, hogy legyen igazságos az elosztás.)



Kérdezzük meg:

- *Most mindenkinek ugyanannyi pénze van?*
- *Most igazságos? Miért?*

Igazságos, ha az 1 főnek ad 1 db-ot, a 2 fős csoportnak ad 2 db-ot, a 3 fős csoportnak 3 db-ot és megtart 2 db-ot.

Hívjunk ki újra 6 tanulót. Osszuk fel őket egy 2 tanulóból és egy 4 tanulóból álló csoportra. Adjunk a 2 fős csoportnak 8 db ezrest. Helyezzük őket a tanulók elé (tehát ne osszuk ki). Mennyi pénzt adjunk a 4 fős csoportnak, hogy igazságos legyen?

- *Mennyi pénzt adjunk minden tanulónak a 4 fős csoportban?*
- *Hány forintot kap összesen a 4 diák, hogy igazságos legyen?*

A pénzosztás feladat kulcsszerepet játszik az arány fogalmának intuitív megalapozásában. A feladat feldolgozása során fontos, hogy ne álljunk meg annál a kérdésnél, hogy „igazságos-e” az elosztás, hanem tudatosan irányítsuk a tanulókat különböző összehasonlítási szempontok felé. Érdekes egymás mellé helyezni az additív és relatív megközelítéseket, például olyan kérdésekkel, mint: „*Ugyanannyival kaptak többet?*”, illetve „*Ugyanolyan arányban kaptak?*”. A tanár itt tudatosan tartózkodjon az azonnali értékeléstől, és hagyja, hogy a különböző megoldási módok egymás mellett

megjelenjenek. Ez a helyzet kiválóan alkalmas arra, hogy a relatív gondolkodás első formái spontán módon megjelenjenek, és a tanulók saját érveiken keresztül szembesüljenek a különböző stratégiák közötti különbségekkel.

### 3. BESZÉLGETÉS AZ ARÁNYOKRÓL

Beszéljük meg mit jelentenek az arányok a mindennapokban, mire használjuk a köznyelvben ezt a kifejezést, milyen szinonimái vannak.

*Az arány, arányos fogalmakat tágabb értelemben az egyenletes, harmonikus, igazságos fogalmak szinonimájaként használják. Az arányos szó ilyen értelmezése a fogalom nem mérhető dolgokra való kiterjesztése. A jutalmat a teljesítménnyel arányosnak mondjuk. Amikor a vétség nagyságával arányos büntetésről beszélünk, az arányos jelzővel annak igazságos voltát akarjuk kifejezni. Az aránylag kifejezést sokszor a viszonylag szóval azonos értelemben használjuk.*

### 4. OLVASMÁNY

[https://www.kooperativ.hu/matematika/3\\_modulle%3%ADr%3%A1sok-tan%3%A1r-tanul%3%B3-eszk%3%B6z/2\\_A\\_t%3ADpus/6-%3%A9vfolyam/2\\_Tan%3%A1ri%20modulok/067-t%3%A9mak%3%B6r/AMAT\\_0671\\_%20tan%3%A1r.pdf](https://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%3%ADr%3%A1sok-tan%3%A1r-tanul%3%B3-eszk%3%B6z/2_A_t%3ADpus/6-%3%A9vfolyam/2_Tan%3%A1ri%20modulok/067-t%3%A9mak%3%B6r/AMAT_0671_%20tan%3%A1r.pdf)

6-7. oldal

Olvasmány elolvasása vagy megbeszélése képekkel, PPT segítségével.

Az olvasmány feldolgozása során a vizuális elemek nem pusztán illusztrációként jelennek meg, hanem a megértést támogató reprezentációként. A tanár feladata, hogy a képek és a szöveg közötti kapcsolatot explicitté tegye, és segítse a tanulókat abban, hogy a látottakat matematikai viszonyként értelmezzék. Érdemes kérdésekkel irányítani a figyelmet, például: „Mit hasonlítunk itt össze?” vagy „Mihez viszonyítjuk az egyes elemeket?”.

### 5. ARÁNYOK JELENTÉSE A MATEMATIKÁBAN

*A matematikában az arány két mennyiség, mérhető dolog viszonya. Maga a mérés is arány, hiszen méréskor a választott mértékegységhez viszonyítunk. Az arány két (azonos mértékegységben értett) érték hányadosával fejezhető ki.*

Arány jelentésének megbeszélése

**Két szám hányadosát a két szám arányának is nevezzük.**

**Két szám aránya megmutatja, hogy az egyik szám hányszorosa a másiknak.**

Füzetbe a szabály leírása.

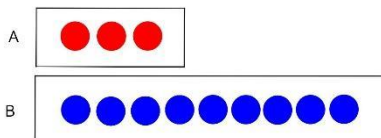
Közösen példák gyűjtése, 1-2 leírása

Az arány matematikai jelentésének bevezetésekor kulcsfontosságú a különbség és a viszony elkülönítése. A tanárnak célszerű egymás mellé állítani az additív és a multiplikatív gondolkodást, például: „3-mal több” és „háromszor annyi”. Ez segíti a tanulókat abban, hogy felismerjék: az arány nem különbséget, hanem viszonyt fejez ki. A definíció rögzítése így nem elszigetelt szabályként jelenik meg, hanem egy már megtapasztalt gondolkodási különbség formalizálásaként.

## 6. ARÁNYOK FELÍRÁSA, MEGBESZÉLÉSE

Figyeld meg a keretekben lévő pöttyöket és válaszolj az alábbi kérdésekre!

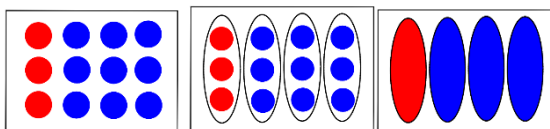
- Hány pöttyel több B, mint A? 6-tal
- Hányszorosa a B az A-nak? háromszorosa
- Hányadrésze A a B-nek? harmada
- Írd fel a piros és kék pöttyök arányát! 3:9
- Írd fel a kék és piros pöttyök arányát! 9:3



## 7. ARÁNYOK FELÍRÁSA TÖBB FÉLEKÉPPEN

Fel tudnánk-e írni többféleképpen P:K arányt?

Csoportosítsuk a korongokat!



$$3:9 = 1:3$$

Attól függ, mekkora egységet választunk az összehasonlításhoz.

Az egyenlő arányokra rávezetésre remek példa a gyurma. A kis gyurma gombócok készítése és összegyúrása jó szemléltetése lehet az arányok egyszerűsítésének, és ez remek alkalmat ad a törtekkel való összekapcsolásra.

Két arány egyenlő, ha az értékük megegyezik.

Az osztás tulajdonságából következik, hogy az arány „bővíthető” és „egyszerűsíthető”.

Megbeszéljük diszkrét mennyiségek (pöttyök) arányát és azt, hogy mit jelent az arány értéke. A pöttyök csoportosításával eljutunk az arányok egyenlőségéig, illetve az arányok értékéig.

Az arányok többféle felírásának vizsgálata során a hangsúly a változatlanóság felismerésére kerül. A tanulók csoportosítási tevékenységén keresztül juthatnak el annak megértéséhez, hogy bár a számok változnak, a viszony állandó marad. A tanár itt tudatosan késleltesse a „kész” megoldás kimondását, és inkább kérdésekkel vezesse rá a tanulókat a felismerésre. Ez a folyamat támogatja az absztrakció kialakulását és a relációs gondolkodás erősödését.

## 8. CSOPORTALAKÍTÁS

A csoportok előre alakíthatóak a kártyák célzott kiosztásával, differenciált csoportok létrehozása célszerű. a kártyák szabadon alakíthatóak a csoport képességeihez, érdemes lehet egyszerűbb arányok alkalmazása. A csoportalakítás során nem elegendő a párok megtalálása, hanem szükséges a kapcsolatok indoklása is. A tanulók így nemcsak felismerik az azonos arányokat, hanem érvelni is kénytelenek mellettük.

Keressd a párod!

$$2:5 = 20:50 = 0,2:0,5 = 40:100$$

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 75:100 = 3:4$$

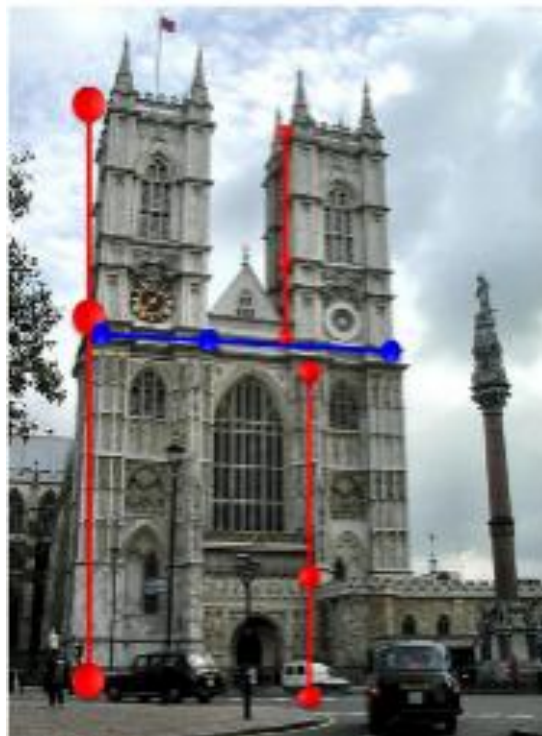
$$\frac{2}{3} = \frac{12}{18} = 0,2:0,3 = 4:6$$

$$\frac{7}{5} = 1,4 = 9,8:7 = 4,9:3,5$$

$$1:2 = 2:4 = 10:20 = 30:60$$

## 9. DIFFERENCIÁLT FELADATOK

1. csoport: lemélni a képen az adott távolságokat, és felírni az arányukat, ezt átírni más alakba
2. csoport: lemélni a képen az adott távolságokat, és kiszámolni az arányok értékét
3. csoport: lemélni a képen az adott távolságokat, és kiszámolna az arányok értékét
4. csoport: folytatni az 1,1,2,3,5 sorozatot. Kiszámolni az egymást követő tagok arányértékét.
5. csoport: folytatni az 1,1,2,3,5 sorozatot. Kiszámolni a szomszédos tagok arányértékét a 8-tól néhány elemig. Mit veszel észre?



Az egyes csoportok erősségüknek megfelelően kapjanak feladatot

Az arányérték számolásához két féle feladatot kaphatnak a tanulók, az egyik csoport egy építészeti alkotás megadott méreteinek arányértékét számolja, míg a másik csoport a Fibonacci-sorozat szabályát keresi, illetve az egymást követő tagok arányait számolja. Az értékek összehasonlítása lehetőséget ad az aranymetszés megbeszélésére és a természetben előforduló jelenségek bemutatására.

## **10. A CSOPORTOK MUNKÁJÁNAK MEGBESZÉLÉSE, ÖSSZEHASONLÍTÁSA, TAPASZTALATOK EGYEZTETÉSE.**

Beszélgetés a Fibonacci-sorozatról és az aranymetszésről.

Az aranymetszés megjelenése a természetben

## 11. A TERMÉSZET SZÁMOKBAN VIDEO

<https://www.youtube.com/watch?v=YQnGBqHqo4g> (3:44)

### Instrukció a tanároknak:

- A tempó lassítása, inkább több vélemény meghallgatása.
- Nem baj, ha kimarad betervezett feladat, a meglátások, gondolatok most sokkal fontosabbak, mint az egy jó válasz utáni tovább haladás.
- Nincs rossz válasz, csak vélemény van. Kíváncsiak vagyunk mindenki elképzelésére.
- Minden válasz esetén, ha jó, ha rossz, megpróbálunk semlegesek maradni. Hagyjuk, hogy sokan elmondják a meglátásukat, és csak a végén beszéljük meg a kérdést.
- Ne tegyünk fel sugalmazó kérdéseket, ebben is próbáljunk semlegesek maradni.
- Nem egyedül kell pontos választ adni, a meglátásokkal közösen jutunk el a megoldáshoz, ezért mindenki véleménye egyformán értékes.

## 2. ÓRATERV

**Műveltségi terület:** Matematika

**Tantárgy:** Matematika

**Osztály:** 7.b

**Az óra témája:** Arányok

**Az óra cél-és feladatrendszere:**

**Fejlesztendő attitűd:** Önbizalom fejlesztése, önálló gondolatok megfogalmazásának bátorsága. **Érvelés erősítése.** Más nézőpont elfogadása. Érvelés kultúrájának gyakorlása.

**Készségek, képességek:** A matematikai gondolkodás, a modellalkotás, a modellek érvényességi körének eldöntése. A matematikai és a grafikus reprezentáció készségének fejlesztése.

**Elérendő fejlesztési szint, tudásszint:** A tanult ismeretek alkalmazása, azonos értékű arányok felismerése, arányok meghatározása.

**Az óra célja:** az arányok összehasonlításának, azonos értékű arányok felismerésének, az arányok meghatározásának a gyakorlása. Az önálló gondolatok megfogalmazásának bátorsága, az érvelés erősítése, más nézőpontok elfogadása.

**Az óra didaktikai feladatai:** Gyakorló, megerősítő óra

**Tantárgyi kapcsolatok:**

- Biológia
- Művészetek

**Felhasznált források:**

- Degrande, T., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Open word problems: taking the additive or the multiplicative road?. *ZDM*, 50, 91-102.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Vanluydt, E., De Keyser, L., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2023). Stimulating early proportional reasoning: an intervention study in second graders. *European Journal of Psychology of Education*, 1-22.
- [https://www.kooperativ.hu/matematika/3\\_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2\\_A\\_t%C3%ADpus/6-](https://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/6-)

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia		
		Módszerek	Tanulói munkafarmák	Eszközök
3 perc	1. Hívogató, elcsendesedés Óraszám és cím felírása a füzetbe: Arányok	Ráhangolódás, tanári instrukcióadás	Frontális	Kivetítő, füzet
5 perc	2. Bemelegítő kérdések	Aktiválás, előzetes tudás mozgósítása	Egyéni, frontális ellenőrzés	Kivetítő, füzet
3 perc	3. Diszkrét mennyiségek aránya, törtrész és arány összekapcsolása	Munkáltatás	Páros munka	
3 perc	4. Diszkrét mennyiségek aránya, törtrész és arány összekapcsolása	Megbeszélés	Frontális	Kivetítő
3 perc	5. Arányok színezése	Munkáltatás	Önálló munka	Kivetítő
3 perc	6. Arányok színezésének megbeszélése	Kérdezés, megbeszélés	Frontális	Kivetítő, foglalkoztató lapok
3 perc	7. Kígyós feladat. Melyik kígyó nőtt nagyobbat?	Problémafelvetés, kognitív konfliktus előidézése, vitaindítás	Frontális	Kivetítő, foglalkoztató lapok, a terem két sarkában A és B felirat
6 perc	8. Miért gondolod, hogy Sling vagy Sleng nőtt nagyobbat önmagához képest?	Érveltetés, vita moderálása, gondolkodási stratégiák ütköztetése	Frontális	Kivetítő
3 perc	9. Arány jelentésének megbeszélése	Fogalomalkotás, formalizálás, általánosítás	Frontális	Kivetítő
5 perc	10. PIZZÁK – arányok összehasonlítása	Problémamegoldás, vitaindítás, alkalmazás	Frontális	Kivetítő

3 perc	11. Téglalapok hasonlítása	Problémafelvetés, nézőpontok ütköztetése	Frontális	Kivetítő
1 perc	12. Dicséret. Piros pont jár jó megoldásokért.	Értékelés, pozitív megerősítés	Frontális	

Az óra felépítése tudatosan épít a tanulók meglévő additív gondolkodására, majd ezt fokozatosan ütközteti a multiplikatív szemlélettel, amely az arány fogalmának megértéséhez elengedhetetlen. A feladatok egymásra épülése nem csupán gyakorlást szolgál, hanem kognitív konfliktusok előidézésén keresztül segíti a fogalmi váltást.

## 1. HÍVOGATÓ

## 2. VILLÁMKÉRDÉSEK

Az órát 10 villámkérdésből álló feladattal kezdjük, majd ismét egy pöttyös feladat következik, az elmúlt órához hasonlóan, azonban itt már nem egész szám az arányérték.

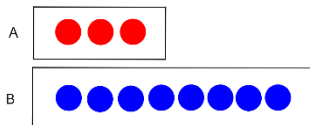
A bevezető villámkérdések elsődleges célja az aritmetikai rutin aktiválása és a tanulók „bemelegítése”. Ezek a feladatok látszólag egyszerű számolások, valójában azonban előkészítik a későbbi aránygondolkodást azzal, hogy a „fele”, „kétszerese”, „háromszorosa” típusú relációkat hangsúlyozzák.

1. Mennyi 36-nak a fele?
2. Mennyi 36 kétszeresénél 4-gyel nagyobb szám?
3. Mennyi 18-nak a negyede?
4. Mennyi a 110 felének a duplája?
5. Mennyi a 200 duplájának a fele?
6. Melyik az a szám, aminek a háromszorosa 39
7. Melyik az a szám, aminek a kétszerese fele a 100-nak?
8. Melyik az a szám, aminek a harmada annyi, mint 10 ötszöröse?
9. „Ha egy osztályban 2 fiúra jut 3 lány, akkor 10 fiúra hány lány jut”  
Ha az állatkertben egy gondozóra 5 majom gondozása jut, 30 majom hány gondozóhoz tartozik?

Villámkérdések. Csak az eredményt elég leírni. Ha szükséges, a számolást is lehet.

### 3. DISZKRÉT MENNYISÉGEK ARÁNYA, TÖRTRÉSZE ÉS ARÁNY ÖSSZEKAPCSOLÁSA

Figyeld meg a keretekben lévő pöttyöket és válaszolj az alábbi kérdésekre!



- f. Hány pöttyel több B, mint A? **5-tel**
- f. Hányszorosa a B az A-nak? Azaz mennyivel kell megszorozni az A-t, hogy a B-t kapjuk? **8/3**
- f. Hányadrésze A a B-nek? **3/8 része, mert 8 egyenlő részre osztom és 3-at veszek belőle**
- f. Írd fel a piros és kék pöttyök arányát! **3:8**

Írd fel a kék és piros pöttyök arányát! **8:3**

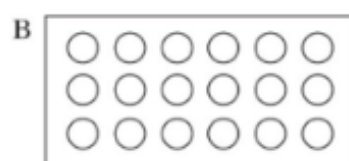
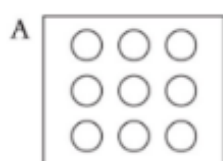
A pöttyös feladat (diszkrét mennyiségek aránya) kulcsszerepet játszik abban, hogy a tanulók ugyanazt a helyzetet több reprezentációban is értelmezzék: különbségként, hányadosként, törtrészként és arányként. Ez a feladat erősíti a reprezentációk közötti átjárást, ami a matematikai megértés egyik alapja.

Az arány kapcsán a két mennyiség viszonyáról beszélgetünk, például hányszorosa egyik a másiknak. Majd a tanulókat egy színezéses feladatra hívjuk. Két kupacban eltérő mennyiségű pötty található és a megadott utasítás szerint kell színezni a pöttyöket. Cél az eltérő mennyiségeken ugyanakkora arány megjelenítése. Illetve a két mennyiségben található pöttyök közül ugyanannyi számú pötty színezése esetén az egyes arányok megállapítása.

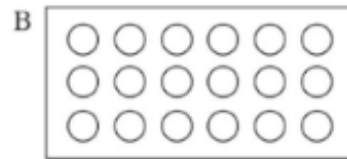
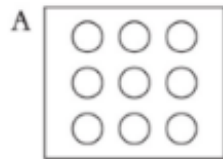
### 4. ARÁNYOK SZÍNEZÉSE

Színezd be az A ábrában a körök valamekkora részét.

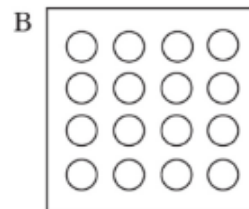
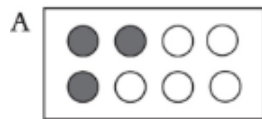
Színezd be a B ábra köreit is úgy, hogy a köröknek ugyanannyiad része legyen színes.



Színezz be ugyanannyi kört az A-ban és a B-ben. Az A hányad része színes? A B hányad része színes?



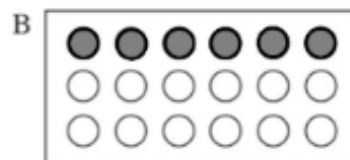
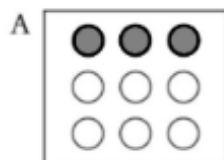
Színezd be úgy a B-t, hogy legyen a B ugyanannyiad része sötét, mint az A-nak.



A színezéses feladatok már egy absztrakciós lépést jelentenek: itt a tanulóknak különböző elemszámú halmazokon kell ugyanazt az arányt megjeleníteniük. Ez a rész kifejezetten az ekvivalens arányok felismerését fejleszti.

## 5. ELLENŐRZÉS

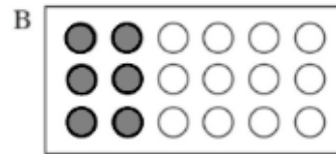
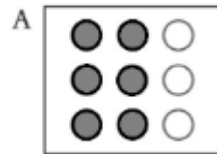
- a. Színezd be az A ábrában a körök valamekkora részét.  
Színezd be a B ábra köreit is úgy, hogy a köröknek ugyanannyiad része legyen színes.



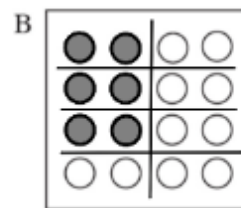
Egy példa:

**kétszer annyit kell a B-ben színezn**

- b. Színezz be ugyanannyi kört az A-ban és a B-ben. Az A hányad része színes? A B hányad része színes?



- c. Színezd be úgy a B-t, hogy legyen a B ugyanannyiad része sötét, mint az A-nak.



### 6 kör legyen színes

**Az A-t 8 egyenlő részre tudom felosztani, és 3 részt veszek. Ugyanígy a B-t is 8 egyenlő részre osztom, és 3 részt színezek. Azaz mindkettő  $\frac{3}{8}$  része lesz színes.**

A következő feladatokat Lamon (2020) könyve inspirálta. A feladathoz a terem két sarkában egy-egy lapot rakunk ki A és B felirattal. A feladatban a tanulónak két válaszlehetőség közül kell választani, minden esetben megkérjük őket, hogy álljanak abba a sarokba, amelyiket igaznak gondolják. A beállítás után megkérdezzük, miért választották azt a sarkot, ahol éppen állnak. Lehetőség szerint ne a helyes választ adókat kérdezzük először, hanem a másik csoport tagjait, és csak az ő érvelésük után kérdezzük a másik csoportban állók véleményét. A válaszokat megítélés nélkül hallgatjuk végig, és az érvelések után megkérjük a tanulókat, hogy ismét döntsenek, melyik sarkot választják. A változtatókat megkérdezzük, miért döntöttek a másik sarok mellett. Azt várjuk, hogy az érvelések közben megértenek összefüggéseket, és tanári magyarázat nélkül, csak egymás érveire reflektálva megtalálják a helyes választ. Ezután következik a tanári magyarázat, összefoglalás. A feladatokat alkalmasnak tartjuk a vitás elindítására. Ez nehéz abban az esetben, ha a tanulók más módszerekhez vannak szokva. Nagyon fontos azt erősíteni a feladat elején, hogy nincs megítélés, lehet rossz választ

adni, most az a fontos, hogy egymás gondolatait megismerjük, és az érvek segítségével eljussunk közösen a jó megoldáshoz.

## 1. KÍGYÓS FELADAT. MELYIK KÍGYÓ NŐTT NAGYOBBAT?

A feladat kiosztása, elolvasása.

1. Jánosnak két kígyója van. Sling és Sleng. Öt évvel ezelőtt ekkorák voltak a kígyók:



Most ekkorák a kígyók:



Melyik kígyó nőtt nagyobbat?

*Állj az A sarokba, ha szerinted Sling nőtt nagyobbat önmagához képest. Állj a B sarokba, ha szerinted Sleng nőtt nagyobbat önmagához képest*

A terem két sarkában egy-egy lap kiragasztása A és B felirattal

A feladatokat kiosztjuk és megkérjük a tanulókat, álljanak abba a sarokba, amelyik kígyó szerintük nagyobbat nőtt önmagához képest.

*Miért gondolod, hogy Sling vagy Sleng nőtt nagyobbat önmagához képest?*

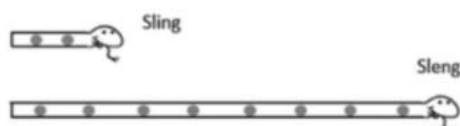
## 2. ÁLLÁSPONTOK MEGISMERÉSE

Álláspontok meghallgatása mindkét oldalon állóktól. Az arány szempontjából „rossz” oldallal kezdünk és csak utána hallgassuk meg a másik oldal véleményét.

Nagyon fontos annak a hangsúlyozása, nem a különbségek számítanak, hanem hogy melyik hányszorosára változott.

Megmutatjuk a tanulóknak a következő ábrát.

2. Jánosnak két kígyója van. Sling és Sleng. Öt évvel ezelőtt ekkorák voltak a kígyók:



Most ekkorák a kígyók:



Melyik kígyó nőtt nagyobbat?

### 3. ARÁNY JELENTÉSÉNEK MEGBESZÉLÉSE

Sling különböző években mért méreteinek az aránya: 2:6. Mit jelent ez?

*2 egységre jut 6 egység*

*Háromszorosára nőtt*

Hogyan írhatnánk fel Sleng méreteinek arányát?

Mit jelent a 8:16?

*Kétszeresére nőtt*

Fontos kihangsúlyozni, hogy mi a különbség a két út között (additív és multiplikatív).

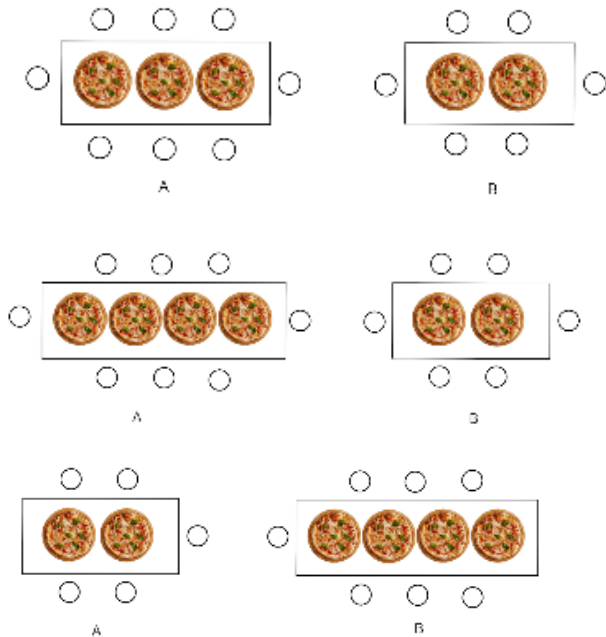
Az egyik valamennyivel több, a másik valahányszoros. Arány esetén a valahányszoros a mérvadó.

### 4. PIZZÁS FELADATOK

A pizzás feladatok a kontextusváltást szolgálják, és erősítik az arány alkalmazását hétköznapi helyzetekben. Ezek a feladatok különösen alkalmasak arra, hogy a tanulók saját intuíciójukra támaszkodva döntsenek, majd ezeket matematikai érvekkel támasszák alá. Javasolt itt is tudatosan kezelni a hibás stratégiákat, és nem azonnal javítani, hanem ütköztetni azokat más megoldásokkal. A cél nem a gyors helyes válasz, hanem a különböző gondolkodási utak láthatóvá tétele.

Döntsd el, hogy az alábbi 3 esetekben ki kap több pizzát. Minden asztalnál igazságosan osztoznak a pizzán. Az A asztalnál ülő személyek vagy a B asztalnál ülő

személyek ehetnek többet? Mennyi pizzát kapnak? Tétélezzük fel, hogy minden pizza azonos méretű és típusú.



Álláspontok meghallgatása mindkét oldalon.

A feladatokat egyesével vetítsük ki/adjuk oda nekik.

Adjunk gondolkodási időt, hogy eldönthessék, melyik sarokba fognak állni. Egy adott jelre álljanak egyik vagy másik sarokba, hogy ne befolyásolják egymást.

A megbeszélés után adjuk a következő feladatot.

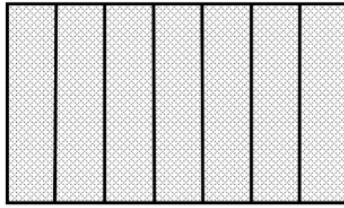
A megbeszélés során nagyon fontos több álláspont meghallgatása. Érdekes ebben a feladatban is először a „rossz” oldallal kezdeni az érvelést, és csak azután áttérni a másik oldal véleményére.

Több álláspont, megoldási mód, gondolatmenet segíti a megértést. Minél többet hallgassunk meg.

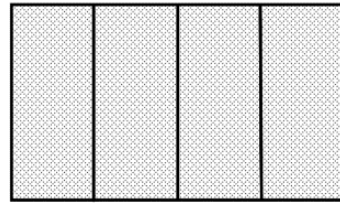
## 5. TÉGLALAPOK

Samu és Olivér azon vitatkoznak, melyik terület a nagyobb. Samu azt mondja az A nagyobb, mert több részből áll. Olivér szerint a B nagyobb, mert az csak 4 részből áll, de nagyobbak a részek.

Szerinted melyik igaz? Állj abba a sarokba, amelyik szerinted nagyobb.



A



B

Melyiküknek van igaza? Hogyan magyaráznád

*el? Mit nem értenek a fiúk?*

Állhatnak középre is, ha úgy gondolják, egyforma a két terület. Erre valószínűleg menet közben jönnek majd rá. Álláspontok meghallgatása mindkét vagy mindhárom oldalon.

### **Instrukció a tanároknak:**

- Tovább erősíteni, hogy most nincs rossz megoldás, nincs egyetlen jó megoldás, érvek, vélemények vannak, amikről beszélünk.

*Ha van egy ház, aminek a 4 oldala 4 különböző színre van festve, és négyen egy-egy oldalra állunk, akkor arra kérdésre, hogy milyen színű a ház, négyen 4 félet fogunk válaszolni, mégis mindannyiunknak igaza lesz. Ha szeretném, hogy mások lássák, hogy igazam van, akkor oda kell hívnom az én oldalamra, vagyis el kell mondanom az én gondolatmenetemet, hogy lássa az én szemszögemet. Én is odamegyek és megnézem az ő oldalát. Akkor látjuk, hogy az a szempont, ami szerint nézte, abban igaza van. Egymás szemszögeit akarjuk most látni és kiválasztjuk azt az oldalt, ahonnan együtt nézzük mindannyian. (De Bono)*

- A különböző stratégiák megbeszélése visz közelebb a megértéshez
- Próbálják azokat kérdezni először, akik csendesek, nem nagyon beszélnek.
- Amikor válaszolnak a gyerekek, akkor ne képviseljünk véleményt
- Hallgassunk meg minél több véleményt egymás után.
- Nem a tanár hozza az "ítéletet", hanem a tanulók. Hagyni kell őket beszélni.

Az érvelés a lényeg, hogy lássák mi a különbség a két (vagy több) megoldás között, amit találnak. Lássák, mitől nem lesz jó az egyik és lesz jó a másik.

## 1. Óraterv

**Műveltségi terület:** Matematika

**Tantárgy:** Matematika

**Osztály:** 7.b

**Az óra témája:** Arányok

**Az óra cél-és feladatrendszere:**

**Fejlesztendő attitűd:** Önbizalom fejlesztése, önálló gondolatok megfogalmazásának bátorsága. **Érvelés erősítése.** Más nézőpont elfogadása. Érvelés kultúrájának gyakorlása.

**Készségek, képességek:** A matematikai gondolkodás, a modellalkotás, a modellek érvényességi körének eldöntése. A matematikai és a grafikus reprezentáció készségének fejlesztése.

**Elérendő fejlesztési szint, tudásszint:** A tanult ismeretek alkalmazása, azonos értékű arányok felismerése, arányok meghatározása.

**Az óra didaktikai feladatai:** Gyakorló, megerősítő óra

**Tantárgyi kapcsolatok:**

- Művészetek

**Felhasznált források:**

- Degrande, T., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Open word problems: taking the additive or the multiplicative road?. *ZDM*, 50, 91-102.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Vanluydt, E., De Keyser, L., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2023). Stimulating early proportional reasoning: an intervention study in second graders. *European Journal of Psychology of Education*, 1-22.
- [https://www.kooperativ.hu/matematika/3\\_modulle%3%ADr%3%A1sok-tan%3%A1r-tanul%3%B3-eszk%3%B6z/2\\_A\\_t%3ADpus/6-%3%A9vfolyam/2\\_Tan%3%A1ri%20modulok/067-t%3%A9mak%3%B6r/AMAT\\_0671\\_%20tan%3%A1r.pdf](https://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%3%ADr%3%A1sok-tan%3%A1r-tanul%3%B3-eszk%3%B6z/2_A_t%3ADpus/6-%3%A9vfolyam/2_Tan%3%A1ri%20modulok/067-t%3%A9mak%3%B6r/AMAT_0671_%20tan%3%A1r.pdf)

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia		
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök
3 perc	1. Hívogató, elcsendesedés Óraszám és cím felírása a füzetbe: Arányok	Ráhangolás, tanári instrukcióadás	Frontális	Kivetítő, füzet
3 perc	2. MONDRIAN FESTMÉNY – arányok keresése	Megfigyelés, problémafelvetés	Egyéni munka	Kivetítő
4 perc	3. Ellenőrzés	Kérdezés, megbeszélés	Frontális	Kivetítő
15 perc	4. Feladatlap megoldása (ld. csatolmány)	Kooperatív tanulás, problémamegoldás, érvelés, vitaindítás	Pármunka	Foglalkoztató lapok
15 perc	5. Ellenőrzés	Kérdezés, megbeszélés, érvelés, vita moderálása, reflektálás	Frontális	Kivetítő
1 perc	6. Dicséret. Piros pont jár jó megoldásokért.	Értékelés, jutalmazás, pozitív megerősítés	Frontális	
1 perc	7. Házi feladat	Reflektív feladatadás	Frontális	

Az órán azonos értékű arányok felismerése, arányok meghatározása a feladat, hangsúlyosan szerepelnek a vizuális reprezentációk. A feladatokban ezeken kell arányokat felismerni és összehasonlítani diszkrét és folytonos formában, illetve vegyesen. Az órán már nem csak a reprezentációkkal dolgozunk, hanem számokkal megadott arányok is megjelennek. Ezen az órán kezdetben pármunkában dolgoznak a tanulók, majd közösen beszélnek meg a tapasztalatokat. A feladatok jellemzően vitaindítóak. Zárt, és nyílt, kérdés is előfordul a feladatok között.

A relatív gondolkodás hangsúlyos szerepet kap ezen az órán, a feladatok alkalmasak a relatív gondolkodás feltárására és annak a multiplikatív stratégia irányába történő elmozdítására.

Az óra célja: a különböző reprezentációk közötti váltások és a multiplikatív gondolkodás erősítése.

## **1. AZ ALÁBBI MONDRIAN FESTMÉNYEN KERESSÜNK ARÁNYOKAT!**

- a) Mennyi a sárga és piros részek aránya?
- b) Mennyi a kék és sárga részek aránya?
- c) Mennyi a fekete és piros részek aránya?
- d) Mennyi a fehér és fekete részek aránya?



Hogy aránylik a kék, sárga, fehér, piros, fekete rész az egész festményhez?

A feladat célja: minél több arány megtalálása, felfedezése, arányok átírása egyszerűbb alakba

## 2. MONDRIAN-FELADAT ELLENŐRZÉSE

A feladat a reprezentációkhoz kötött arányérzék aktiválását szolgálja, miközben lehetőséget ad arra, hogy a tanulók saját megfigyeléseikből induljanak ki. A feladat különösen alkalmas arra, hogy a tanulók spontán módon fogalmazzanak meg arányokat, még formális definíció nélkül. Javasolt itt tudatosítani, hogy ugyanazt a viszonyt többféleképpen is kifejezhetjük (például törtként vagy aránypárként), és rákérdezni arra, hogy ezek közül melyik alkalmasabb összehasonlításra. Ez segíti a fogalmi tisztázást és előkészíti a későbbi feladatokat.

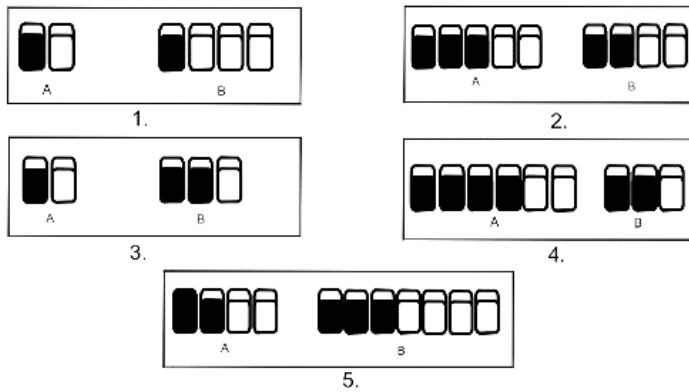
Az ellenőrzés szakasza nem pusztán visszacsatolás, hanem a különböző megközelítések összevetésének terepe.

## 3. FELADATLAP MEGOLDÁSA

A páros munka lehetőséget ad arra, hogy a tanulók megfogalmazzák gondolataikat, és egymás stratégiáival találkozzanak. A feladatok sokfélesége tudatosan biztosítja a kontextusváltást, ami elengedhetetlen az arány fogalmának általánosításához. Ezek a feladatok különösen alkalmasak a relatív gondolkodás feltárására, és arra, hogy a tanulók felismerjék: nem az abszolút különbségek, hanem a hányadosok számítanak. Javasolt a tanulók figyelmét időnként ráirányítani arra, hogy „most mennyivel több” vagy „hányszorosa” típusú gondolkodást alkalmaznak-e, ezzel segítve az additív és multiplikatív megközelítés tudatos elkülönítését. A feladatlap egyes elemei kifejezetten alkalmasak tipikus tévképzetek felszínre hozására.

A feladatlap megoldása során nagyon fontos, hogy próbáljanak érvelni a megoldásuk mellett. Felváltva kezdjék a gondolatok megosztását.

1. Festékeket keverünk. Válaszd ki azt a képet, ahol az A és B festék ugyanolyan sötét lesz az összekeverés után.



A 4-es a jó válasz, mert egy feketére jut két fehér. Minden más esetben az egyik arány 1:1, azaz fele-fele.

2. Az ellenőrzés során fontosabbak az ötletek, a megoldások menete, érvelések, mint a megoldás jó vagy rossz volta. Hallgassuk meg a gondolatmeneteket



3. Keress egyenlő arányt! A keresett arány 2:3, a D a jó megoldás



Keressünk „közös” napot. 28 nap alatt ki mennyit eszik?

A: 20, B:21. Tehát B a falánkabb.

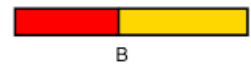
4. Az ellenőrzés során fontosabbak az ötletek, a megoldások menete, érvelések, mint a megoldás jó vagy rossz volta. Hallgassuk meg a gondolatmeneteket.



Az alábbi tortadarabok maradtak egy szülinapi zsúr után. Ha felszeleteljük mindkét részt, melyik kép szemléltetheti a szeleteket?

*Kétszer annyi a csokis, mint a tejszínhabos, B a jó megoldás.*

5. Keress azonos arányt! 1:2



az A a helyes megoldás



6. Ha a kisebb köteg pénz 1 millió dollár, akkor vajon mennyi pénz lehet a nagyobb kötegben?

- A. 3 millió dollár
- B. 4 millió dollár
- C. **5 millió dollár**
- D. 6 millió dollár



7. Károly olyan magas, mint 6 kosárlabda vagy mint 15 pizzásdoboz. A fia, Karcsi olyan magas, mint 4 kosárlabda. Hány pizzásdoboznyi Karcsi magassága?



2 labda 5 dobozt ér. Akkor 4 labda 10-et. Karcsi 10 doboz magas.

8. Osszuk fel a kék sávot 1:2 arányban.

Osszuk fel a kék sávot 1 : 2 arányban



A



B



C



D

A D a helyes megoldás.

9. Összekeverünk valamennyi 100 %-os narancslét és vizet. Az összekevert egységeket arányát a táblázatban láthatod. Melyik keverék lesz a leginkább narancsízű?

Érdeemes lehet páronként hasonlítani

	narancs	víz
A	2	3
B	3	4
C	5	7
D	8	9
E	4	5

A D a jó megoldás

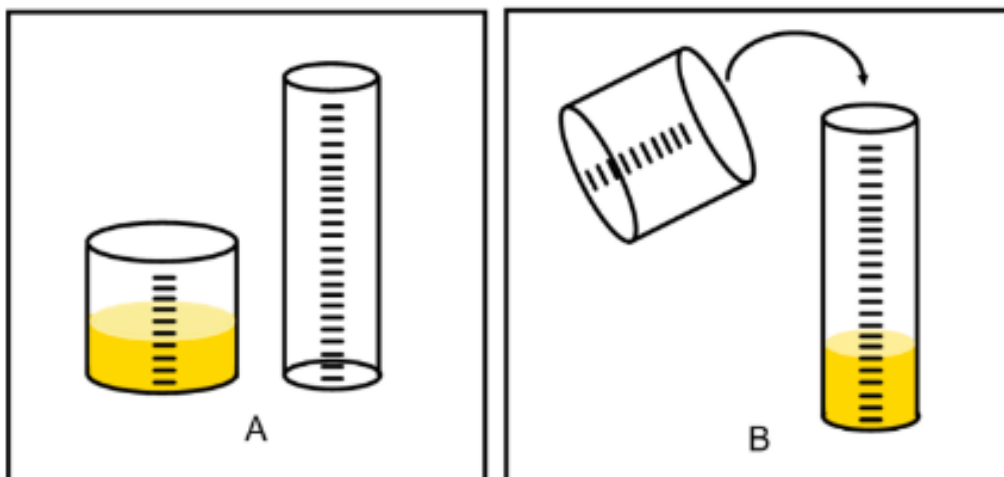
	NUMERUS	VIT	
A	2	3	●●●●●
B	3	4	●●●●●●●
C	5	7	●●●●●●●●●●●
D	8	9	●●●●●●●●●●●●●●●
E	4	5	●●●●●●●●

Ez a feladat jó VITAINDÍTÓ. Az érvek lerajzolása, a gondolatmenet elmondása segít a meggyőzésben. Az ellenőrzés során fontosabbak az ötletek, a megoldások menete, érvelések, mint a megoldás jó vagy rossz volta. Hallgassuk meg a gondolatmeneteket. Próbáljuk rávenni őket, hogy a párokat egymáshoz hasonlítsák. Fontos az érvek megfogalmazása, meghallgatása. Ne mondjuk el a jó megoldást, amíg nem jutnak a tanulók valamiféle konszenzusra, közös döntésre. Próbálják egymást meggyőzni.

#### 4. NARANCSLÉ A HENGEREKBEN

Az ábrán két henger alakú mérőedényt látsz. Az edényeken egyenlő távolságban vannak a jelölések feltüntetve. A széles edénybe narancslét töltünk a 4. jelig, majd átöntjük a keskeny edénybe. Ebben a narancslé a 6. jelig emelkedik. (ld.: B)

Ezután kiöntjük ebből is a narancslét, majd a széles edénybe ismét töltünk, most a 6. jelig. Milyen magasra emelkedne a narancslé, ha átöntenénk a keskeny hengerbe?



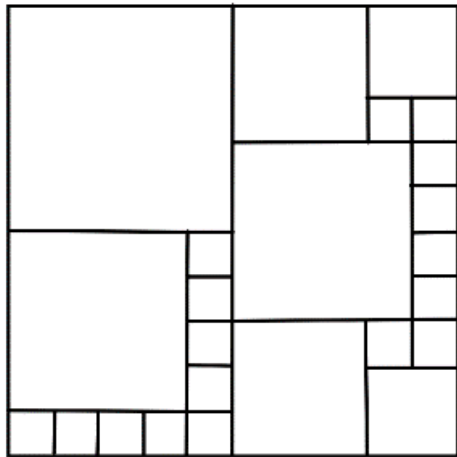
a. Melyik jelölésnél lenne a narancslé a széles hengerben, ha az eredeti mennyiség felét öntenénk bele?

b. Meddig tartana a narancslé a keskeny hengerben, ha átöntenénk?

A feladat két tipikus válasza a 8 és a 9. Míg a 8 az additív stratégiát (ha az egyik 2-vel több, akkor a másik is) jelöli, addig a 9 a multiplikatív gondolkodást jelzi (ha az egyik másfélszerese lesz, akkor a másik is). A feladat megbeszélése lehetőséget ad a kétféle gondolkodás összehasonlítására és megértésére. A feladat tisztázása kiemeli a multiplikatív gondolkodás lényegét és fontosságát.

## 5. HÁZI FELADAT

Készíts feladatot, színezd ki a festményt másképp!



#### 4. Óraterv

**Műveltségi terület:** Matematika

**Tantárgy:** Matematika

**Osztály:** 7.b

**Az óra témája:** Arányok

**Az óra cél-és feladatrendszere:**

**Fejlesztendő attitűd:** Önbizalom erősítése, az önálló gondolatok megfogalmazásának bátorítása, az érvelés és a más nézőpontok elfogadásának fejlesztése, az érvelés kultúrájának gyakorlása, valamint a becslés értékének tudatosítása.

**Készségek, képességek:** A matematikai gondolkodás, a modellalkotás, a modellek érvényességi körének eldöntése. A matematikai és a grafikus reprezentáció készségének fejlesztése.

**Elérendő fejlesztési szint, tudásszint:** A tanult ismeretek alkalmazása, azonos értékű arányok felismerése, arányok meghatározása.

**Az óra célja:** Az óra célja a folytonos mennyiségekkel megadott arányok összekapcsolása a diszkrét mennyiségekkel, illetve számadatokkal megadott arányokkal, továbbá a becslés szerepének tudatosítása és erősítése.

**Az óra didaktikai feladatai:** Gyakorló, megerősítő óra

**Tantárgyi kapcsolatok:**

- Művészetek

**Felhasznált források:**

- Degrande, T., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Open word problems: taking the additive or the multiplicative road?. *ZDM*, 50, 91-102.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Vanluydt, E., De Keyser, L., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2023). Stimulating early proportional reasoning: an intervention study in second graders. *European Journal of Psychology of Education*, 1-22.
- [https://www.kooperativ.hu/matematika/3\\_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2\\_A\\_t%C3%ADpus/6-%C3%A9vfolyam/2\\_Tan%C3%A1r%20modulok/067-t%C3%A9mak%C3%B6r/AMAT\\_0671\\_%20tan%C3%A1r.pdf](https://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/6-%C3%A9vfolyam/2_Tan%C3%A1r%20modulok/067-t%C3%A9mak%C3%B6r/AMAT_0671_%20tan%C3%A1r.pdf)

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia		
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök
3 perc,	1. Hívogató, elcsendesedés	Ráhangolódás	Frontális	Kivetítő, füzet
5 perc	2. Narancslé keverékek	Problémafelvetés, kognitív konfliktus előidézése	Frontális	Forgatható A és B feliratú tábla, kivetítő
2 perc,	3. Kávés feladat	Gyors döntési helyzet	Frontális	Forgatható A és B feliratú tábla, kivetítő
1 perc	4. Segítő kép megbeszélése	Szemléltetés, irányított értelmezés	Frontális	Kivetítő, füzet, foglalkoztató lapok
5 perc	5. Egy falu lakossága	Problémafelvetés	Párban	Kivetítő, füzet, foglalkoztató lapok
5 perc	6. Tológatós- tippelős Diszkrét- folytonos mennyiségek	Reprezentációk közötti váltás, analógiás gondolkodás, problémamegoldás	Párban	Feladatkártyák, piros-kék sávos modell
5 perc	7. Számmal megadott arányok- folytonos mennyiségek	Absztrakció, formalizálás, alkalmazás	Párban	Feladatkártyák, piros-kék sávos modell
2 perc	8. Könyv oldalainak becslése	Becslés, arányos következtetés	Frontálisan	Kivetítő, füzet, foglalkoztató lapok
10 perc	9. Felmérés	Diagnosztikus értékelés	Önálló munka	Feladatlap
3 perc	10. A mérés két feladatának megbeszélése. Emlékeztetés a kígyós feladatra.	Reflektálás, fogalmi összekapcsolás	Frontális	Tábla
1 perc	11. Dicséret. Piros pont jár jó megoldásokért.	Értékelés, pozitív megerősítés	Frontális	
1 perc,	12. Házi feladat	Reflektív feladatadás	Frontális	

Az óra célja a folytonos mennyiségekkel megadott arányok összekapcsolása diszkrét mennyiségekkel, illetve számadatokkal megadott arányokkal, továbbá a becslés szerepének erősítése. Az óra feladatai tudatosan váltogatják a különböző reprezentációkat, ezáltal



támogatják az arány fogalmának rugalmasabb értelmezését. A fejlesztés középpontjában a multiplikatív gondolkodás erősítése, az intuitív becslések tudatosítása, valamint a különböző megoldási utak összevetése áll.

## 1. HÍVOGATÓ, ELCSENDESEDÉS

### 2. NARANCSLÉ FELADAT

A bemelegítő feladatban narancslé és víz keverékének az arányát hasonlítjuk szavazással. Kis táblán A és B betűk szerepelnek, a megfelelő tábla felemelésével szavazhatnak a tanulók. A táblák emelése gyors ellenőrzést tesz lehetővé, bár léteznek erre alkalmas applikációk, ez egy gyors, kényelmes és átlátható megoldás. Azon túl izgalmasabb, mint a füzetben a reláció jelét rajzolgatni.

Melyik esetben lesz narancsosabb az italunk, ha a következő esetekben narancslét és vizet keverünk össze?

 <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>a)</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>b)</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>c)</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>d)</p>	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		3	1		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	narancs	víz	2	2	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		1	4		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> </table>	narancs	víz	2	6	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		4	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td></tr> </table>	narancs	víz	5	3	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		2	3		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	narancs	víz	3	5	 <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>e)</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>f)</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>g)</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td></td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <p>h)</p>	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		1	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	narancs	víz	2	1	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		1	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	narancs	víz	1	5	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		2	3		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	narancs	víz	1	1	A	B	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		5	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td></tr> </table>	narancs	víz	7	3
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		3	1		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	narancs	víz	2	2																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
3	1																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
2	2																																																																																																																
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		1	4		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> </table>	narancs	víz	2	6																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
1	4																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
2	6																																																																																																																
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		4	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td></tr> </table>	narancs	víz	5	3																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
4	2																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
5	3																																																																																																																
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		2	3		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	narancs	víz	3	5																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
2	3																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
3	5																																																																																																																
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		1	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	narancs	víz	2	1																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
1	2																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
2	1																																																																																																																
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		1	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	narancs	víz	1	5																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
1	2																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
1	5																																																																																																																
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		2	3		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	narancs	víz	1	1																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
2	3																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
1	1																																																																																																																
A	B																																																																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	narancs	víz		5	2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: yellow;">narancs</td><td style="background-color: lightblue;">víz</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td></tr> </table>	narancs	víz	7	3																																																																																																						
narancs	víz																																																																																																																
5	2																																																																																																																
narancs	víz																																																																																																																
7	3																																																																																																																

A narancslé-keverékes feladat gyors, motiváló belépési pontként működik. A tanulók két keverék közül választanak, és arról döntenek, melyik esetben lesz „narancsosabb” az ital. A táblás szavazás gyors visszajelzést ad a tanárnak, miközben játékosabb és áttekinthetőbb, mint a füzetben végzett egyéni jelölés. A feladat alkalmas arra, hogy az additív és multiplikatív összehasonlítás közötti különbséget felszínre hozza. A rövid megbeszélés célja nem csupán a helyes válasz kimondása, hanem a mögöttes gondolkodás láthatóvá tétele.

Ellenőrzés.

### 3. KÁVÉS FELADAT

Instant kávé készítés:

- A. 5 kanál kávéhoz adunk 4 egység tejet
- B. 2 kanál kávéhoz adunk 3 egység tejet

Melyik esetben lesz sötétebb a kávénk?

Emeld az A vagy B táblát!



### 4. SEGÍTŐ KÉP, HA SZÜKSÉGES.



A kávé feladat hasonló funkciót tölt be, de más kontextusban. A „Melyik esetben lesz sötétebb?” kérdés ismét gyors döntési helyzetet teremt, és lehetőséget ad az intuitív válaszok ütköztetésére. A két egymás utáni rövid feladat segíti annak felismerését, hogy az arányok összehasonlítása nem a mennyiségek egyszerű különbségére, hanem a részek viszonyára épül. Ez a kettős bevezetés jól előkészíti a későbbi, összetettebb feladatokat.

### 5. EGY FALU LAKOSSÁGA

Egy falu lakosságának a száma a 2010-es népszámlálás szerint 10 517 fő. Az alábbi táblázat azt mutatja be, hogy az 1930-as népszámlálás során hogyan alakult a lakosság relatív nagysága. Mennyivel nőtt a falu lakossága az 1930-as népszámlálás óta?

1930	
2010	

A jelölés értékének meghatározásával a tanulók kiszámíthatják az egy egységhez tartozó népességszámot. 1 smile értékének meghatározása.  $F 10517:13=809$ -et ér.

#### 1.megoldás:

$$3 \text{ smile: } 809 \cdot 3 = 2427$$

10517-2427=8090

## 2. megoldás

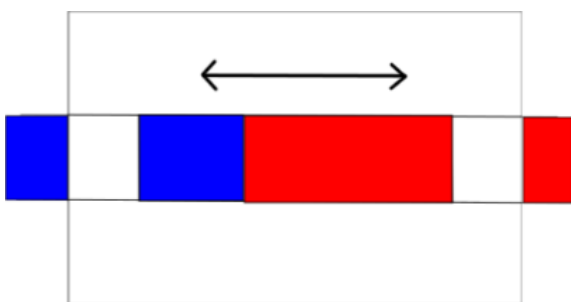
10 smile a különbség, akkor  $10 \cdot 809 = 8090$ -nel nőtt a lakosság.

A feladat a relatív viszonyok értelmezését erősíti számadatos kontextusban. A feladat célja, hogy a tanulók egy arányos viszonyt konkrét népességadatra alkalmazzanak, és többféle megoldási utat is felfedezhessenek. Nem egyetlen algoritmust kíván előhívni, hanem teret ad többféle gondolkodási módnak. A pármunka itt különösen indokolt, mert a tanulók meg tudják beszélni egymással, hogyan értelmezik az ábrát vagy a jelöléseket, és hogyan jutnak el a számításig.

## 6. TOLÓGATÓS-TIPPELŐS JÁTÉK DISZKRÉT MENNYISÉGEKKEL

Az óra fontos feladata az arányok diszkrét, folytonos mennyiséggel, illetve számadat formában megadott reprezentációinak összekapcsolása. Ehhez egy egyszerű kis eszközt használtunk, amelyen a színes sáv tologatásával a kék és piros részek nagysága változtatható.

*Folytonos mennyiség megjelenítésére használt eszköz*



*Egy piros és egy kék sávot ragasztottunk egymáshoz, amit belefűztünk egy kartonlapba, így a sávnak csak egy része látható fehér kartonon vágott nyílásban. A piros-kék sáv mozgatható marad, ennek mozgatásával változtatni tudjuk a piros és kék*

*szín arányát. Ez az eszköz szolgált segítségül abban, hogy a diszkrét mennyiséggel vagy számadattal megadott arányt megjelenítsék a tanulók. Fontosnak tartottuk, hogy ebben a pármunkában a megérzéseikre támaszkodjanak, és intuitív módon próbálják megbecsülni az adott arányt, majd közösen ellenőrizzék. Fontos, hogy ne a méregetés közben esetleg behúzott kis vonalak segítségével próbálják beállítani a sávot, és ne számoljanak, hanem a pöttyök alapján „érzésre” állítsák az eszközt.*

Ezután szerepelt az órán olyan nyitott végű feladat, aminek nem tudjuk pontosan meghatározni a megoldását, csak becsült értéket tudunk megadni.

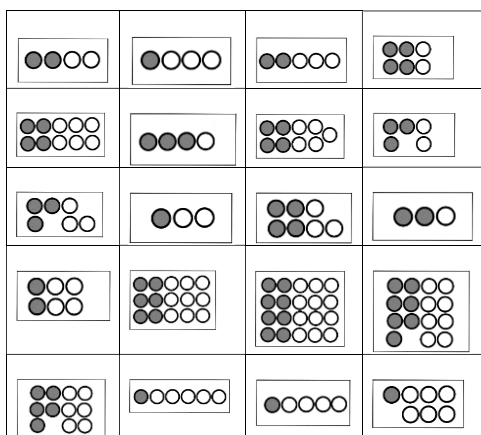
*Becsüld meg! Kinek van igaza? Ki az ügyesebb becselő?*

Állítsd úgy az eszközt, hogy a középső ablakban a kék és piros sáv aránya a megadott arány legyen!

Vonalzóval ellenőrizheted a megoldást!

Húzz egy kártyát és állítsd a megfelelő arányra a sávodat!

Becslés feladat diszkrét mennyiségekkel



Hogyan tudod ellenőrizni a megoldást?

Hány egyenlő részre kell osztani az adott szakaszt?

Hány részt számolok belőle?

## 7. TOLOGATÓS-TIPPELŐS JÁTÉK SZÁMADATTAL MEGADOTT ARÁNYOKKAL

Egyikük húz kártyát, beállítják a sávokat, majd összehasonlítják, és méréssel ellenőrzik, kinek van igaza.

A feladat elején fontos megbeszélni az ellenőrzés menetét. Hány egyenlő részre érdemes osztani az egész szakaszt, mennyit veszünk az egységből.

Az ellenőrzés során számoljanak, addig a becslés a fontos.

Becsüld meg! Kinek van igaza? Ki az ügyesebb becslő?

Állítsd úgy az eszközt, hogy a középső ablakban a kék és piros sáv aránya a megadott arány legyen!

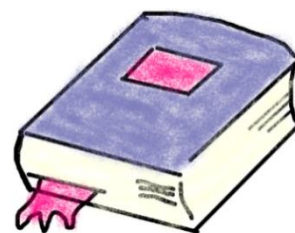
Vonalzóval ellenőrizheted a megoldást!

2:3	1:1	1:4	2:5
4:6	3:1	4:5	3:2
3:3	1:2	4:3	2:1
2:4	6:9	8:12	7:8
5:6	1:5	1:4	1:6

## 8. KÖNYV OLDALAINAK BECSLÉSE

Hányadik oldalon tarthatok a könyvben, ha 1005 oldalas és már majdnem kiolvastam?

Ennek a feladatnak nincs egyetlen jó megoldása. Becsülni tudok, és ez alapján számolni, de nem lehet pontos választ adni, csak becslést.



Sok tényező felmerülhet. Ott van-e a könyvjelző, ahol éppen tartok.

A könyv előlapját látjuk-e vagy fordítva van rajta a borító.

Van olyan könyv, ami előlről is hátulról is olvasható két nézőpont szerint. Ez olyan?

A becslés fontossága a cél, hogy lássák, mindennap használjuk. Ha például holnapra kell a kötelezőt elolvasni. Becslünk, ha a táskába akarunk valamit beletenni, vajon belefér-e. Ételek elrakása dobozokba. Számos téren hasznos, ha becslni, hasonlítani tudunk, nincs szükségünk minden esetben pontos megoldásra.

A könyv oldalainak becslésére vonatkozó feladat tudatosan nyitott végű. A tanulók megtapasztalhatják, hogy nem minden matematikai helyzetben létezik egyetlen pontos válasz, és bizonyos esetekben a becslés a legcélszerűbb stratégia. A feladat hétköznapi példákon keresztül mutatja meg, hogy a becslés a mindennapi döntések fontos része. Itt különösen érdemes hangsúlyozni, hogy a jó becslés nem „találgatás”, hanem viszonyok tudatos mérlegelése.

## 9. FELMÉRÉS

Az óra végére egy két feladatból álló gyors mérést terveztünk.

Felmérés 2 feladat

1. Melyik terem alakja hasonlít legjobban egy négyzetre?

A: 1 méter x 4 méter

B: 17 méter x 20 méter

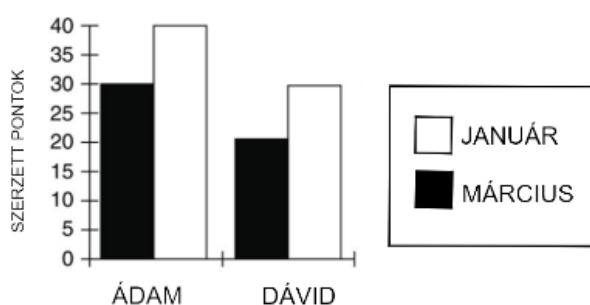
C: 7 méter x 10 méter

D: 27 méter x 30 méter

**Írd le részletesen, miért arra a lehetőségre esett a választásod!**

2. Két kosárlabdacsapat ugyanabban a szezonban januárban és márciusban is játszott egymással. A meccseken két nagyszerű sztárt hoztak a pályára. Januárban Ádám 30, Dávid 20 pontot szerzett. Márciusban Ádám 40, Dávid 30 pontot szerzett. A következő oszlopdiagram ezt az információt mutatja. Magyarázd el, melyik játékos teljesítménye javult jobban.

**Írd le az indoklásod!**



Külön lapon megoldva, ha kész adják be a feladatot. Részletes indoklást kérjünk tőlük leírva.

Az óra végére tervezett rövid felmérés diagnosztikus szerepet tölt be. Visszajelzés arra nézve, hogy a tanulók mennyire tudják alkalmazni az órán feldolgozott szemléletet új helyzetekben. Az első feladat a hasonlóság és az arányérzék kapcsolatát vizsgálja, a második pedig kifejezetten alkalmas az additív és multiplikatív összehasonlítás megkülönböztetésének feltárására. A részletes indoklás kérése különösen fontos, mert nemcsak a választ, hanem a mögötte álló gondolkodást is láthatóvá teszi.

## 10. HÁZI FELADAT

Írj egy-egy példát!

- Hány gyerek lehet abban a családban, ahol a kétszer annyi lány van, mint fiú?
- Hányan lehetnek abban az osztályban, ahol a fiúk és a lányok aránya 2:3?

- Milyen magas lehet Nelli, ha Nelli és az anyukája magasságának aránya 2:3?

Dani és Bori súlyának aránya 5:2. Milyen súlyúak lehetnek a gyerekek

### **Instrukció a tanároknak:**

- A rugalmasság fontos. Nem baj, ha kimarad egy feladat, ne sajnáljuk az időt. A különböző gondolatok megismerése sokkal fontosabb, mint minden betervezett feladat megoldása
- Tanárként nem mindig érezzük, hogy a „csillagokat is lehoztuk” egy-egy feladattal, mégis lehet ez fontos magvetés. A tanulók gyakran térnek vissza bizonyos példákra, ilyenkor kiderül, hogy korábban érintettünk magasságokat a témában.
- Hagyjuk a tanulókat megnyilvánulni
- Fontos figyelni, és érdemes a tanulók többségére jellemző stratégia vizsgálatát, nem mindig jelent érthető magyarázatot mindenkinek, ha a legjobbak, leggyorsabbak gondolataihoz igazodunk, érdemes más stratégiák előhozása, megvizsgálása, akár összehasonlítása

## 5. Óraterv

**Műveltségi terület:** Matematika

**Tantárgy:** Matematika

**Osztály:** 7. osztály

**Az óra témája:** Arányok, arányos osztás

**Az óra cél-és feladatrendszere:**

**Fejlesztendő attitűd:** Önbizalom fejlesztése, önálló gondolatok megfogalmazásának bátorsága. Érvelés erősítése. Más nézőpont elfogadása. Érvelés kultúrájának gyakorlása.

**Készségek, képességek:** A matematikai gondolkodás, a modellalkotás, a modellek érvényességi körének eldöntése. A matematikai és a grafikus reprezentáció készségének fejlesztése.

**Elérendő fejlesztési szint, tudásszint:** A tanult ismeretek alkalmazása, azonos értékű arányok felismerése, arányok meghatározása, arányos osztás és vizuális megjelenítése

**Az óra célja:** az arányos osztás megértése és az ezekkel kapcsolatos feladatok megoldása vizuális reprezentációk segítségével.

**Az óra didaktikai feladatai:** Gyakorló, megerősítő óra

**Tantárgyi kapcsolatok:**

- Művészetek

**Felhasznált források:**

- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Csehóczi Erzsébet – Csatár Katalin – Kovács Csongorné – Morvai Éva – Széplaki Györgyné 2022. *Matematika 7. Tankönyv*. Oktatási Hivatal. Budapest.

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia		
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök
3 perc	1. Hívogató, elcsendesedés Óraszám és cím felírása a füzetbe: Arányok	Ráhangelődés, motiváció	Frontális	Kivetítő, füzet
5 perc	2. Házi feladat ellenőrzése	Ellenőrzés, visszacsatolás	Frontális ellenőrzés	Füzet
6 perc	3. Bemelegítő feladat	Aktiválás, előzetes tudás mozgósítása	Önálló munka	Feladatlap
6 perc	4. Bögrés süti recept	Problémafelvetés, megbeszélés	Frontális	Kivetítő, füzet
2 perc	5. Sütemény feladat. Arányos osztás megbeszélése a recept segítségével	Megbeszélés, érvelés	Frontális	Kivetítő, füzet
3 perc	6. Arányos feladat korongokkal ábrázolva (Tehenek és disznók)	Szemléltetés, reprezentáció alkalmazása, megbeszélés	Frontális	Kivetítő, füzet, piros-kék korong
3 perc	7. Arányos feladat korongokkal és szakaszokkal ábrázolva (Malacok és csirkék)	Szemléltetés, reprezentációk összekapcsolása	Frontális	Kivetítő, füzet, piros-kék korong
7 perc	8. Vegyes feladatok gyakorlásra	Kooperatív tanulás, alkalmazás	Páros munka	Kivetítő, füzet, piros-kék korong
3 perc	9. Ellenőrzés	Megbeszélés, érvelés	Frontális	Kivetítő, füzet
1 perc	10. Dicséret. Piros pont jár jó megoldásokért.	Értékelés, pozitív megerősítés	Frontális	
1 perc	11. Házi feladat ismertetése, a főbb lépések megbeszélése (rajz készítés, számolás stb.)	Reflektív feladatadás	Frontális	

Az óra célja az arányos osztás fogalmi megértésének kialakítása. A tanulók egy konkrét kontextusból (recept) kiindulva jutnak el az egységképzésen alapuló megoldási eljáráshoz. A feladatokat minden esetben vizuális reprezentációk (diszkrét és folytonos modellek) segítségével dolgozzák fel, majd ezeket kapcsolják össze számolási eljárásokkal.

Az arányos osztás bevezetéséhez egy bögrés süti receptjét használtuk. A recept segítségével jutunk el az arányos osztásig. Ezután következnek az arányos osztással kapcsolatos feladatok, melyeket minden esetben először vizuális reprezentációk segítségével oldunk meg. Piros-kék korongokkal rakosgatva az arányokat, foglalkozunk az egységképzéssel, majd a mennyiségek kiszámításával a kirakások segítségével. A kirakások után a tanulók rajzokat készítenek a füzetbe a megoldás lépésit feltüntetve. Ezen az órán kérjük minden feladat esetében a kirakásokat, majd a vizuális reprezentációkat. A feladatok során megmutatjuk a diszkrét rajzokat, amikor pöttyökkel ábrázolunk, majd a szakaszokkal felrajzolt megoldást is választást kínálva a tanulóknak, hogy a későbbiekben melyiket használják szívesebben.

### 1. HÍVOGATÓ, ELCSENDESEDÉS

### 2. HÁZI FELADAT ELLENŐRZÉSE

### 3. BEMELEGÍTŐ FELADAT

Az arányok közül válaszd ki az egyenlő értékűeket!

a)  $\frac{7}{6}$

b)  $\frac{3}{4}$

c) 10 : 4

e) 0,6 : 1

f)  $\frac{1}{4}$

g) 2,5 : 1

h)  $\frac{25}{100}$

i) 6 : 8

j) 21 : 18

k)  $\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$

Mennyi

a) 4 cm és 1 dm,

b) 0,5 l és 2 l,

c) 6 perc és  $\frac{1}{2}$  óra,

d) 45,5 dkg és 182 kg aránya?

### 4. BÖGRÉS SÜTI RECEPT

## BÖGRÉS SÜTI



#### HOZZÁVALÓK

1 bögre tej

1 bögre cukor

2 bögre liszt

1/2 bögre olaj

1 cs vaniliás cukor

1 cs sütőpor

2 ek. kakaó

2 db tojás



## HOZZÁVALÓK

1 bögre tej  
 1 bögre cukor  
 2 bögre liszt  
 1/2 bögre olaj  
 1 cs vaniliás cukor  
 1 cs sütőpor  
 2 ek. kakaó  
 2 db tojás

## DUPLA ADAG



Arányos osztás leírása a füzetbe

### 5. SÜTEMÉNY FELADAT. ARÁNYOS OSZTÁS MEGBESZÉLÉSE A RECEPT SEGÍTSÉGÉVEL

A sütemény készítésekor összekevertem a száraz hozzávalókat, a 2 bögre cukrot és 4 bögre lisztet, amely összesen 600 gramm. Hány gramm lisztet használtam?

Összesen hány bögrényi?

Mennyi az egység?

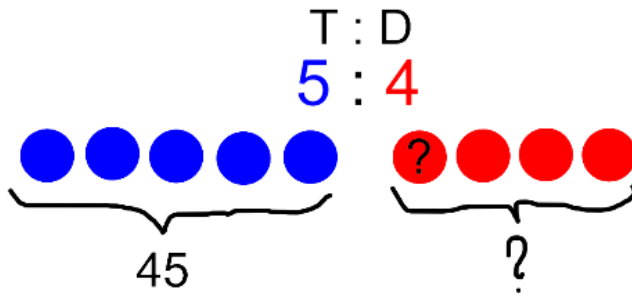
Hogyan számolok?

A megoldás kulcsa az egység meghatározása: az összes mennyiséget az arány egységeire bontjuk, majd egy egység értékéből számítjuk vissza a keresett mennyiséget.

### 6. ARÁNYOS FELADAT KORONGOKKAL ÁBRÁZOLVA (TEHENEK ÉS DISZNÓK)

Tehenek és disznók élnek egy tanyán. 45 tehen van, a tehenek és disznók számának aránya 5:4.

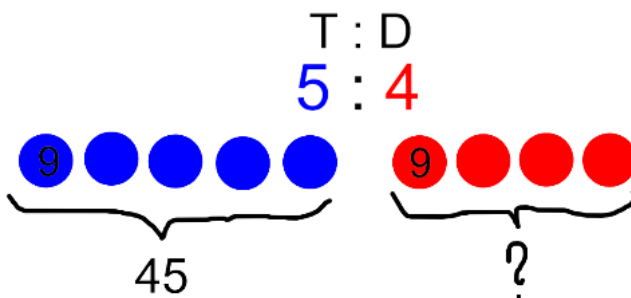
- Tehenek és disznók élnek. 45 tehén van, a tehenek és disznók számának aránya 5 : 4.



Első lépésben rakjuk ki a korongokkal az arányokat és figyeljük meg

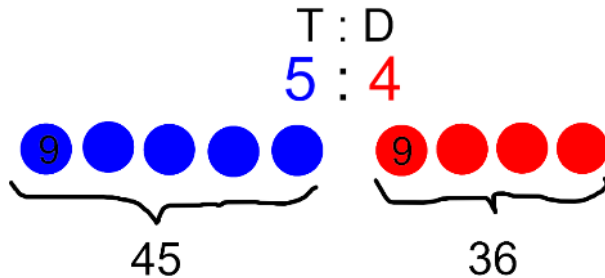
A kék korongok (tehenek) számát tudjuk. Ha 5 korong 45-t ér, akkor 1 korong értéke 9.

- Tehenek és disznók élnek. 45 tehén van, a tehenek és disznók számának aránya 5 : 4.



A piros és kék korongok értéke megegyezik, tehát egy piros korong is 9-et ér.

- Tehenek és disznók élnek. 45 tehén van, a tehenek és disznók számának aránya 5 : 4.



A következő lépésben már meg tudjuk határozni az összes piros korong (disznók) számát.

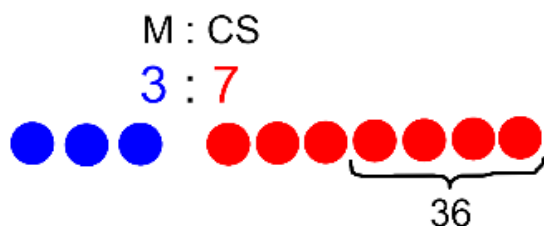
## 7. ARÁNYOS FELADAT KORONGOKKAL ÉS SZAKASZOKKAL ÁBRÁZOLVA (MALACOK ÉS CSIRKÉK)

Ábrázoljuk a feladatot.

A fontos, hogy valamilyen módon ábrázoljuk a feladat adatait és a sematikus rajz segítségével számoljunk.

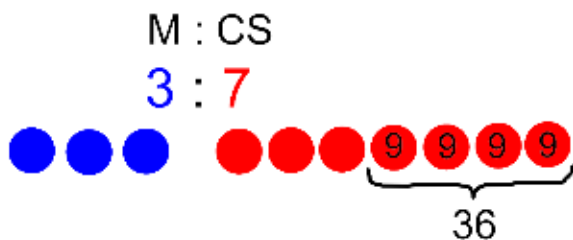
- b. A malacok és csirkék aránya 3:7 és 36-tal több csirke van, mint malac.

A malacok és csirkék aránya 3:7 és 36-tal több csirke van, mint malac.



Az első lépésben megfigyelik a korongok különbségét. A piros korongból 4-gyel több van, azaz a 4 korong 36-ot ér.

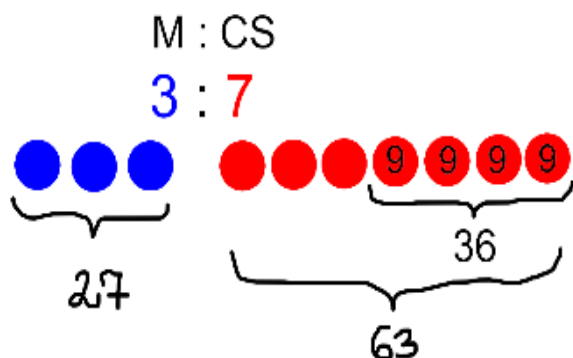
A malacok és csirkék aránya 3:7 és 36-tal több csirke van, mint malac.



A következő lépésben kiszámoljuk az egységet.

Ha a 4 korong 36-ot ér, akkor 1 korong értéke 9.

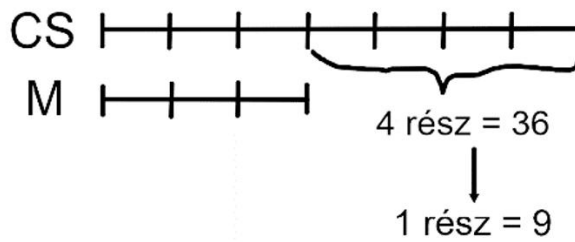
Így a korongok mindegyike 9-et ér.



A harmadik lépésben az egység ismeretében kiszámítjuk az összes piros (csirkék) és az összes kék (malacok) értékét.

Ellenőrzésként figyeljük az arányokat, egyszerűsítsük a 27:63 arányt, és számoljuk ki, valóban 36-tal több csirke van, mint malac. Fontos, hogy a feladat szövege szerint végezzük az ellenőrzést.

Egy másik lehetőség a feladat ábrázolására. A folytonos mennyiség felosztása nehezebb a tanulóknak. Nehezebben értik, hogy az azonos szakaszok azonos egységeket jelölnek és nehezebben kapcsolnak egy-egy folytonos mennyiséghez értéket. Ettől függetlenül érdemes bevezetni ezt a típusú sematikus ábrát.



Ábrázoljuk a feladatot. Bármilyen reprezentáció jó. Mutassunk több példát is akár.

A fontos, hogy valahogyan ábrázoljuk a feladat adatait és a sematikus rajz segítségével számoljunk.

Fogalmazzuk meg azt is, hogy hogyan lehetne rajzok nélkül kiszámítani a feladatot, milyen fontosabb lépései vannak a feladat megoldásának és beszéljünk arról, hogy vajon ez minden esetben működik-e. Megfogalmazzuk, hogy az arányos osztás minden esetben visszavezethető egy egység meghatározására.

## 8. VEGYES FELADATOK GYAKORLÁSRA

- A malacok, tehenek és birkák aránya 2:4:7 és 65-tel több birka van, mint malac
- A malacok és csirkék aránya 2:3 és 40-nel több láb van, mint szem.
- 5 csirkére jut egy tehen és 30 csirke van

Kérjük, hogy használjanak valamilyen sematikus rajzot. Mindegy, hogy körök vagy szakasz, vagy bármi, találjanak ki maguknak valamilyen kézenfekvő ábrázolást, ha nem a mi általunk javasoltat szeretnék használni.

Ellenőrzésnél minél több különböző megoldást nézzünk meg.

Beszéljük meg, melyik kinek miért kézenfekvő vagy sem.

## 9. HÁZI FELADAT

Egy jó pogácsához a felhasznált 0,8 kg lisztben a finomliszt és a rétesliszt aránya 2:3.

Hány dkg liszt kell az egyes fajtákból?

Egy háromszög szögeinek aránya 3:5:7.

- Hány fokokak a háromszög szögei?
- Hányadrésze a legkisebb szög nagysága a legnagyobb nagyságának?

Ezt az órát egy szabad gyakorló óra, ahol a tanulók rajzokat készítenek a feladatok megoldásához, a preferált mennyiség típusokat használva, eldönthetik, hogy a diszkrét vagy folytonos mennyiségek használata segíti-e őket a feladatok megoldásában és megoldás menetének a leírásában. A tanárok szabadkezet kaptak a feladatok kiválasztására akár a tankönyvek, munkafüzetek segítségével, akár a saját kedvenc feladatuk alkalmazásával. Az óra célja a gyakorlás és a tanult ismeretek megerősítése, a reprezentációk használatának mélyítése.

Fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy az összeállított óratervek önmagukban nem elegendők a kívánt célok eléréséhez. A kutatásban résztvevő tanárokkal előzetesen történt megbeszéléseket, egyeztetéseket, és a folyamat során folyamatosan jellemző újra tervezéseket elengedhetetlennek tartjuk.