Nem egész alapú számrendszerek topologikus és fraktális tulajdonságai

Komornik Vilmos

Magyar Tudományos Akadémia

Budapest, 2017. január 18.

Kivonat

Rényi Alfréd 1957-ben általánosította a szokásos egész alapú számrendszereket nem egész alapokra.

Ez számos érdekes és mélyre ható problémához vezetett a számelmélet, kombinatorika, halmazelmélet, valószínűségszámítás, mérték- és ergodelmélet, szimbolikus dinamika és a topológia területén.

Ez alkalommal főleg egyértelműségi kérdésekkel foglalkozom.

Az előadás Erdős Pállal, Joó Istvánnal, Paola Loretival, Pethő Attilával, Marco Pedicinivel, Martijn de Vries-zel, Anna Chiara Lai-jal, Martine Baatz-cal, Shigeki Akiyama-val, Derong Konggal és Wenxia Li-vel közös kutatásainkon alapul.

Egyértelmű előállítások

Majdnem minden valós szám egyértelműen felírható tizedes tört alakban. A kivételes esetekben két előállítás van: egy csupa nullával és egy csupa kilencessel végződő; például

$$0.500\,000\ \cdots = 0.499\,999\ \cdots\,.$$

Hasonló a helyzet, ha valamely adott $m \geq 2$ egész mellett az általánosabb

$$x = \frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m^2} + \frac{c_3}{m^3} + \cdots$$

előállításokat tekintjük a $0, 1, \ldots, m-1$ számjegyekkel.

Előállítások a $0, \ldots, m-1$ számjegyekkel, ha $q \neq m$

Megváltozik a helyzet, ha az

$$x = \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2} + \frac{c_3}{q^3} + \cdots$$

előállításokat tekintjük a $0, 1, \ldots, m-1$ számjegyekkel, de $q \neq m$. Ilyen előállítás csak *megengedett* értékek: $x \in [0, \frac{m-1}{q-1}]$ esetén lehetséges.

- ha $q > m$, akkor minden előállítás egyértelmű, de nem minden megengedett szám állítható elő;
- ha $1 < q < m$, akkor minden megengedett szám előállítható, de az előállítás ritkán egyértelmű.

Az utóbbi esetben az egyértelmű előállítással rendelkező számok halmaza egynél kisebb “dimenziójú”. Célunk e halmazok közelebbi vizsgálata.

Hausdorff dimenzió (speciális eset)

Tekintsünk egy $\mathbb{R}^n$-beli nem-üres, korlátos és zárt K halmazt. Ha alkalmas r_i arányú f_i kicsinyítésekkel K az $f_1(K), \ldots, f_m(K)$ képhalmazok (lényegében) diszjunkt egyesítése, akkor a K halmaz d Hausdorff dimenziója eleget tesz az

$$r_1^d + \cdots + r_m^d = 1$$

egyenlőségnek, és $0 \leq d \leq n$.

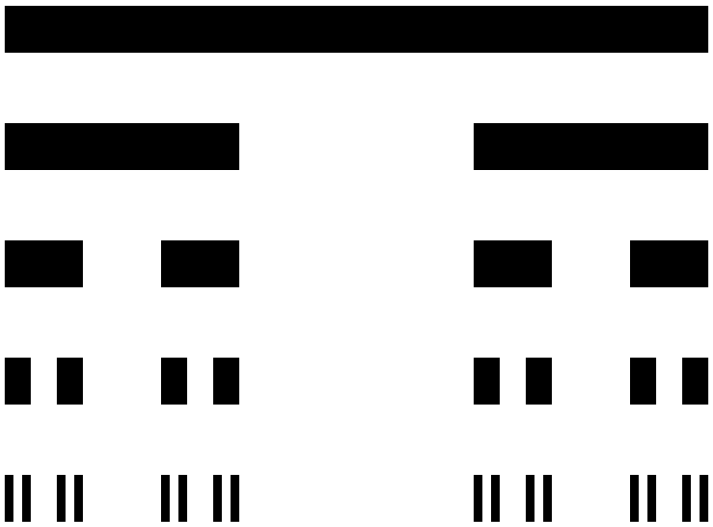
Példák

- Egy négyzet négy egybevágó négyzetre bontásával látható, hogy $d = 2$, mert $4 \cdot (1/2)^d = 1$ csak $d = 2$-re teljesül.
- Egy kocka nyolc egybevágó kockára bontásával látható, hogy $d = 3$, mert $8 \cdot (1/2)^d = 1$ csak $d = 3$-ra teljesül.

A Cantor-féle triadikus halmaz

Azon $[0,1]$-beli számok K halmazáról van szó, amelyek felírhatóak a hármas számrendszerben az 1 számjegy alkalmazása nélkül. Ez egy nem üres, zárt halmaz, amelynek nincsenek sem belső, sem izolált pontjai.

K az $f_1(K)$ és $f_2(K)$ halmazok diszjunkt egyesítése, ahol $f_1(x) = x/3$ és $f_2(x) = x/3 + 2/3$. A $2 \cdot (1/3)^d = 1$ egyenletet megoldva $\dim K = \ln 2/\ln 3 \approx 0.631$ adódik.



Általános és mohó előállítások

Az egyszerűség kedvéért olyan

$$x = \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2} + \frac{c_3}{q^3} + \cdots$$

előállításokra szorítkozunk, ahol csak a $0, 1$ számjegyeket használjuk, és $1 < q \leq 2$.

Tétel (Rényi, 1957)

Minden $x \in [0, 1/(q-1)]$ számnak van előállítása. Ezek között van egy lexikografikusan maximális.

Megjegyzés

A maximális előállítást a mohó algoritmus szolgáltatja: minden lépésben az 1 számjegyet választjuk, kivéve, ha az így kapott összeg már túl nagy lenne.

Példák $x = 1$ mohó előállítására

- A $q = 2$ esetben
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$
- A $q = \varphi_3 \approx 1.839$ *Tribonacci* alap esetén ($q^3 = q^2 + q + 1$)
$$1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}.$$
- A $q = \varphi \approx 1.618$ *Fibonacci* alap esetén ($q^2 = q + 1$)
$$1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}.$$

A fenti előállításokat $1^\infty, 1110^\infty$ és 110^∞ alakban is írhatjuk.

Példák $x = 1$ összes előállítására

- A $q = 2$ esetben 1^∞ az egyetlen előállítás.
- A $q = \varphi_3$ esetben végtelen sok *véges* előállítás van:

$$1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{0}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6} = \cdots;$$

szimbolikusan

$$(110)^k 1110^\infty, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Van továbbá egy *végtelen*, sőt *duplán végtelen* előállítás is:

$$(110)^\infty,$$

amelyik végtelen sok nullát és végtelen sok egyest is tartalmaz; pontosabban nincs benne sem egy utolsó egyes, sem egy utolsó nulla számjegy.

Példák $x = 1$ összes előállítására

- A $q = \varphi$ esetben hasonlóan adódnak az

$$(10)^k 110^\infty \quad k = 0, 1, \ldots \quad \text{és} \quad (10)^\infty$$

előállítások, de van még végtelen sok más előállítás is:

$$(10)^k 01^\infty, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Az utóbbi előállítások végtelenek, de nem duplán végtelenek.

- Az $1 < q < \varphi$ esetben $x = 1$-nek kontinuum sok előállítása van (Erdős–Joó–K., 1990).

Az $\mathcal{U}, \widetilde{\mathcal{U}}$ és $\mathcal{V}$ halmazok

Vezessük be a következő halmazokat:

- $q \in \mathcal{U} \iff x = 1$-nek egyetlen előállítása van;
- $q \in \widetilde{\mathcal{U}} \iff x = 1$-nek egyetlen végtelen előállítása van;
- $q \in \mathcal{V} \iff x = 1$-nek egyetlen duplán végtelen előállítása van.

Ekkor

$$\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{V}.$$

Az előbbi példák alapján

$$2 \in \mathcal{U}, \quad \varphi_3 \in \widetilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}, \quad \varphi \in \mathcal{V} \setminus \widetilde{\mathcal{U}} \quad \text{és} \quad (1, \varphi) \cap \mathcal{V} = \varnothing.$$

Kérdés

Van-e $\mathcal{U}$-nak más eleme?

Erdős–Horváth–Joó példája, 1991

Tekintsük az

$$1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^6} + \cdots$$

egyenlet, vagyis a $(c_i) = 11(01)^\infty$ számjegysorozat által értelmezett $q \approx 1.802$ alapot. Itt az $x = 1$ számnak nincs más előállítása:

- ha $(d_i) > (c_i)$, akkor az első új törttel az összeg már túl nagy lesz:

$$\frac{1}{q^n} > \frac{1}{q^{n+1}} + \frac{1}{q^{n+3}} + \cdots \iff 1 > \frac{1}{q} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^7} + \cdots .$$

- ha $(d_i) < (c_i)$, akkor az első elhagyott tört nem kompenzálható eddig hiányzóak hozzávételével ugyanezen egyenlőtlenség miatt.

$\mathcal{U}$ mérete

Emlékeztetünk $\mathcal{U}$ értelmezésére:

$$q \in \mathcal{U} \iff x = 1\text{-nek egyetlen előállítása van.}$$

Tétel (Erdős–Horváth–Joó, 1991)

Az $\mathcal{U}$ halmaz

- *nulla Lebesgue mértékű;*
- *kontinuum számosságú;*
- *első kategóriájú.*

Tétel (Daróczy–Kátai, 1995)

Az $\mathcal{U}$ halmaz

- 1 *(maximális) Hausdorff dimenziójú.*

$\mathcal{U}'$ lexikografikus jellemzése

Jelöljük $\mathcal{U}'$-vel az egyértelmű előállítások (0-1 sorozatok) halmazát. A következő Parry típusú jellemzésben a $\overline{0} := 1$, $\overline{1} := 0$ jelöléseket használjuk:

Tétel (Erdős–Joó–K., 1990)

Egy $c \in \{0,1\}^\infty$ sorozat pontosan akkor tartozik $\mathcal{U}'$-höz, ha

$$c_{n+1}c_{n+2}\cdots < c_1c_2\cdots \quad \textit{valahányszor} \quad c_n = 0,$$

és

$$\overline{c_{n+1}c_{n+2}\cdots} < c_1c_2\cdots \quad \textit{valahányszor} \quad c_n = 1.$$

Például $1^\infty \in \mathcal{U}'$ és $1(10)^\infty \in \mathcal{U}'$: az utóbbi esetben a bal oldal $(01)^\infty$ vagy $(10)^\infty$, a jobb oldal pedig $11(01)^\infty$.

$\mathcal{U}$ topologikus szerkezete

Tétel (Loreti–K., 1998, 2007, Loreti–Pethő–K., 2003)

- *$\mathcal{U}$-nak van egy legkisebb $q' \approx 1.787$ eleme.*
- *$\mathcal{U}$ felülről zárt, de alulról nem: a lezárása $\widetilde{\mathcal{U}}$.*
- *$\overline{\mathcal{U}}$ nulla mértékű Cantor halmaz, így $\mathcal{U}$ sehol sem sűrű.*

Megjegyzés

A q' szám a

$$\frac{\tau_1}{q} + \frac{\tau_2}{q^2} + \cdots = 1$$

egyenlet megoldása, ahol

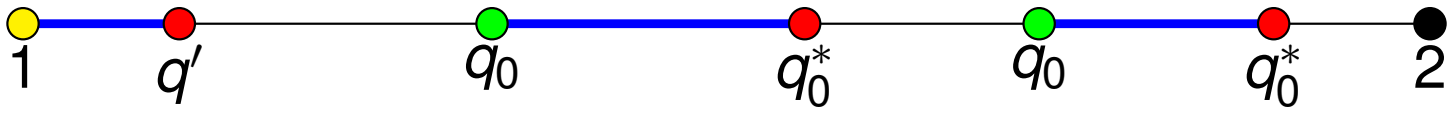
$$\tau_0\tau_1 \cdots = 0\ 1\ 10\ 1001\ 10010110\ \cdots$$

a Thue–Morse sorozat.

$\mathcal{U}$ finomabb szerkezete

Tétel (de Vries–K., 2009)

- $(1,2) \setminus \overline{\mathcal{U}}$ *megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt nyílt* (q_0, q_0^*) *intervallum egyesítése.*
- *A bal végpontok* 1*-et és az* $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ *halmazt futják végig, és valamennyien algebrai egészek.*
- *A jobb végpontok az* $\mathcal{U}$ *halmaz egy valódi* $\mathcal{U}^*$ *részhalmazát futják végig.*



Megjegyzés

$\mathcal{U}^*$ minden eleme transzcendens (Kong–Li, 2014).

Egyértelműségi halmazok

Definíció

Adott q alap esetén jelöljük $\mathcal{U}_q$-val az egyértelmű előállítású x-ek halmazát.

Tétel (de Vries–K., 2009)

- $\mathcal{U}_q$ *zárt halmaz* $\iff q \notin \overline{\mathcal{U}}$.
- $q \in \mathcal{U} \implies$ *minden* $x \in \overline{\mathcal{U}_q} \setminus \mathcal{U}_q$*-nak két előállítása van.*
- $q \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U} \implies$ *minden* $x \in \overline{\mathcal{U}_q} \setminus \mathcal{U}_q$*-nak megszámlálhatóan végtelen sok előállítása van.*

Példa

$2 \in \mathcal{U} \implies \mathcal{U}_2$ nem zárt, és $\overline{\mathcal{U}_q} \setminus \mathcal{U}_q$ a $(0, 1)$-beli diadikusan racionális számok halmaza.

$\mathcal{U}_q$ mérete

A q alap növekedtével $\mathcal{U}_q$ is egyre nagyobb:

Tétel (Glendinning–Sidorov, 2001)

- $1 < q \leq \varphi \Longrightarrow \mathcal{U}_q$*-nak csak két triviális eleme van:* 0 *és* $\frac{1}{q-1}$.
- $\varphi < q < q' \Longrightarrow \mathcal{U}_q$ *megszámlálhatóan végtelen.*
- $q = q' \Longrightarrow \mathcal{U}_q$ *kontinuum számosságú, de* $\dim \mathcal{U}_q = 0$.
- $q' < q < 2 \Longrightarrow 0 < \dim \mathcal{U}_q < 1$.
- $q = 2 \Longrightarrow \dim \mathcal{U}_q = 1$.

Topologikus entrópia és Hausdorff dimenzió

Jelöljük $\mathcal{U}_q'$-vel az $\mathcal{U}_q$-beli számok egyértelmű előállításainak a halmazát. Az $\mathcal{U}_q'$ halmaz *topologikus entrópiáját* a

$$h(\mathcal{U}_q') := \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \left|B_n(\mathcal{U}_q')\right|}{n} = \inf_n \frac{\log_2 \left|B_n(\mathcal{U}_q')\right|}{n}$$

képlettel értelmezzük, ahol $\left|B_n(\mathcal{U}_q')\right|$ az n hosszúságú kezdő szavak számát jelöli az $\mathcal{U}_q'$-beli sorozatokban.

Tétel (Kong–Li–K., 2017)

$$\dim \mathcal{U}_q = \frac{h(\mathcal{U}_q')}{\log_2 q} \quad \textit{minden} \quad q \in (1,2]\textit{-re.}$$

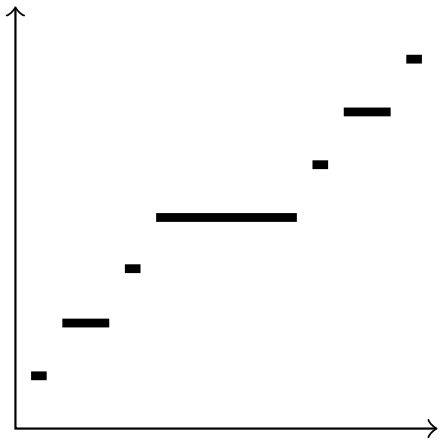
A tétel megjavítja Kátai és Kallós (1999–2001) korábbi eredményeit.

Az “Ördög lépcsője”

A Cantor-függvény az egyetlen olyan folytonos és monoton növekvő $f : [0,1] \to [0,1]$ függvény, amelyet a Cantor-féle triadikus halmazon az

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2c_i}{3^i}\right) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i}$$

képlet definiál:



Erre a függvényre a Newton–Leibniz formula nem érvényes: $f' = 0$ majdnem mindenütt, de $f(0) < f(1)$.

A dimenzió függvény

Tétel (Kong–Li–K., 2017)

A $d(q) := \dim \mathcal{U}_q$ *függvény* $[q', 2]$*-ben*

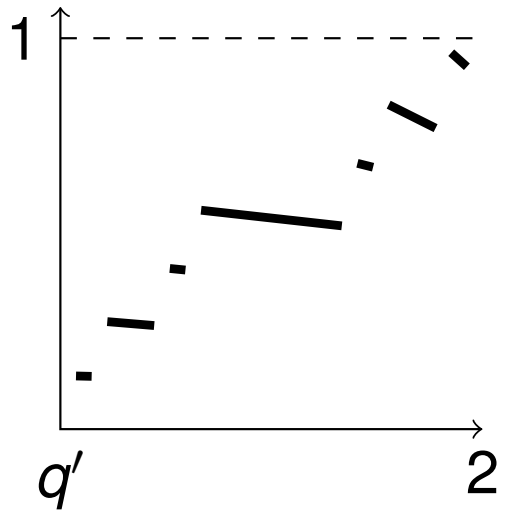
- *folytonos,*
- *korlátos változású (két monoton növekvő függvény különbsége),*
- $d' < 0$ *majdnem mindenütt (*$\overline{\mathcal{U}}$*-on kívül),*
- $d(q') < d(2)$.

A dimenzió függvény

Tétel (Kong–Li–K., 2017)

A $d(q) := \dim \mathcal{U}_q$ *függvény* $[q', 2]$*-ben*

- *folytonos,*
- *korlátos változású (két monoton növekvő függvény különbsége),*
- $d' < 0$ *majdnem mindenütt (*$\overline{\mathcal{U}}$*-on kívül),*
- $d(q') < d(2)$.



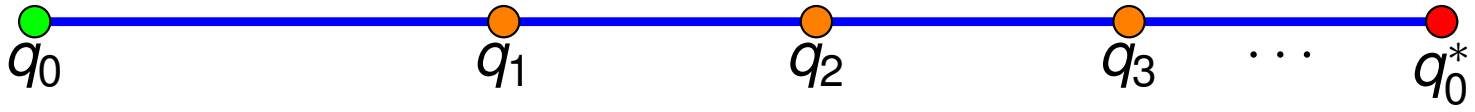
A $\mathcal{V}$ halmaz szerkezete

Emlékeztetünk arra, hogy:

- $q \in \mathcal{U} \iff x = 1$-nek egyetlen előállítása van;
- $q \in \overline{\mathcal{U}} \iff x = 1$-nek egyetlen végtelen előállítása van;
- $q \in \mathcal{V} \iff x = 1$-nek egyetlen duplán végtelen előállítása van.

Tétel

- *$\mathcal{U} \subsetneq \overline{\mathcal{U}} \subsetneq \mathcal{V}$, és $\mathcal{V}$ zárt halmaz.*
- *$\mathcal{V} \setminus \overline{\mathcal{U}}$ elemei algebrai egészek, amelyek $(1,2) \setminus \overline{\mathcal{U}}$ mindegyik (q_0, q_0^*) komponensében monoton növekedő, q_0^*-hoz tartó $q_1 < q_2 < \cdots$ sorozatot alkotnak:*



- *$\mathcal{V}$ legkisebb eleme a φ Fibonacci szám (aranymetszés):*

Stabilitási intervallumok és $\mathcal{U}_q$ topológiája

Tekintsük újra az $\mathcal{U}_q$-beli számok egyértelmű előállításainak az $\mathcal{U}'_q$ halmazát.

Tétel (Daróczy–Kátai, 1993, 1995)

Ha $p < q$, akkor $\mathcal{U}'_p \subseteq \mathcal{U}'_q$.

Tétel (de Vries–K., 2009)

- $\mathcal{U}'_p = \mathcal{U}'_q \iff p, q \in (q_{n-1}, q_n]$ *az* $(1,2) \setminus \mathcal{V}$ *halmaz valamely* (q_{n-1}, q_n) *komponensére.*
- $\mathcal{U}_q$ *pontosan akkor Cantor halmaz, ha* $q \in (q_0, q_1]$ *valamely* $q_0 \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$*-ra:*

Néhány nyitott kérdés

- Tetszőleges $N = 2, 3, \ldots$ esetén kontinuum sok olyan q létezik, amelyekben $x = 1$-nek pontosan N előállítása van. Keveset tudunk ezek halmazáról.
- Tetszőlegesen rögzített $1 < q < 2$ és $N = 2, 3, \ldots$ esetén keveset tudunk azon x-ek halmazáról, amelyeknek pontosan N előállítása van.
- Mi a helyzet általánosabb számjegyhalmazok, például $\{0, 1, 3\}$ esetén?

Általánosított aranymetszés

Rögzített $m \geq 2$ valós szám mellett és $q > 1$ alap tekintsük az

$$x = \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2} + \frac{c_3}{q^3} + \cdots$$

alakú előállításokat, ahol $c_i \in \{0, 1, m\}$ minden i-re, és jelöljük $\mathcal{U}_q$-val az egyértelmű előállítású x-ek halmazát.

Tétel

Létezik egy olyan $p_m > 1$ szám, hogy $1 < q < p_m$ esetén $\mathcal{U}_q$-nak csak két triviális eleme van, $q > p_m$ esetén pedig vannak további elemei is.

Megjegyzések

- Minden háromjegyű számjegyhalmaz ekvivalens a fentivel alkalmas m-re.
- Kétjegyű számjegyhalmazokra az aranymetszés a megfelelő kritikus érték.

Háromjegyű számjegyhalmazok

Tétel (Lai–Pedicini–K., 2011)

- *Az* $m \mapsto p_m$ *függvény folytonos, és*

$$2 \le p_m \le P_m := 1 + \sqrt{\frac{m}{m-1}}$$

  minden m-re.
- $p_m = 2 \Longleftarrow m \in \{2, 4, 8, \ldots\}$.
- $C := \{m \ge 2 \ : \ p_m = P_m\}$ *Cantor-halmaz; a legkisebb eleme* $1 + x \approx 2.3247$, *ahol x az első Pisot számot: az* $x^3 = x + 1$ *egyenlet pozitív gyökét jelöli.*

Megjegyzés

$\dim C = 0$ (Baker–Steiner, 2015).