Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2016

Berzsenyi Dániel Gimnázium
Fazekas Mihály Gimnázium
Budapest

2. javított kiadás
2016. március 11–15.

Technikai előkészítés, tördelés:
Besenyei Ádám, ELTE, Budapest
Szoldatics József, Fazekas Mihály Gimnázium, Budapest

I. fejezet

Előszó

A versenyzőkhöz és tanárkollégákhoz hasonlóan a zsűri is nagy várakozással tekintett a 2016. évi Nemzetközi Magyar matematikaverseny elébe.

Komoly kihívást jelentett a sok szép beküldött feladat feldolgozása, és nehéz volt a választás, hogy közülük melyik 4-szer 6 feladattal örvendeztessük meg a diákokat. Igyekeztünk nagyon alapos és részletes megoldásokat írni, ami egyrészt megkönnyítheti a javítást és a pontozást, másrészt tanulságos lehet a mostani és jövőbeli versenyzők, valamint minden, a matematika iránt érdeklődő diák vagy tanár részére.

Reméljük, ez a könyvecske sokak számára lesz kellemes és hasznos olvasmány, a résztvevőknek pedig felidézi majd a Budapesten együtt töltött napokat.

Minden kedves olvasónak további sok szép matekpéldát és azokhoz örömteli és sikeres fejtörést kíván a versenybizottság:

Besenyei Ádám, Freud Róbert, Gróf Andrea, Horváth Eszter, Moussong Gábor

Feladatok kitűzői

A feladatlapokat az alább felsorolt kollégák javaslatai alapján állítottuk össze.

Bálint Béla, Zsolna

Bencze Mihály, Bukarest

Bíró Bálint, Eger

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Kántor Sándor, Debrecen

Kántor Sándorné, Debrecen

Katz Sándor, Bonyhád

Kekeňák Szilvia, Kassa

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Minda Mihály, Vác

Nagy Piroska Mária, Dunakeszi

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Remeténé Orvos Viola, Debrecen

Róka Sándor, Nyíregyháza

Szabó Magda, Zenta-Szabadka

Szoldatics József, Budapest

Tóth Sándor, Kisvárda

Köszönjük munkájukat!

II. fejezet

Feladatok

II.1. 9. osztály

9/1. feladat Nevezzünk egy számot prímösszegűnek, ha a tízes számrendszerben felírt szám számjegyeinek összege prímszám. Legfeljebb hány prímösszegű szám lehet öt egymást követő pozitív egész szám között?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

9/2. feladat Melyek azok az x egész számok, amelyekre $x^2 + 3x + 24$ négyzetszám?

Szabó Magda (Zenta–Szabadka)

9/3. feladat Bizonyítsa be, hogy az

$$(n^2 + 7n)(n^2 + 7n + 6)(n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12)$$

kifejezés minden egész n esetén osztható 2016-tal.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)
Szoldatics József (Budapest)

9/4. feladat Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögének felezője kétszer olyan hosszú, mint a szárak szögének felezője. Mekkorák a háromszög szögei?

Katz Sándor (Bonyhád)

9/5. feladat Adva van a síkban 2016 olyan pont, hogy minden ponthármasból kiválasztható két pont, amelyek 1 egységnél kisebb távolságra vannak egymástól. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan egységsugarú kör, amely a 2016 pont közül legalább 1008-at tartalmaz.

Bálint Béla (Zsolna)

9/6. feladat Az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ számok mindegyikének értéke $+1$ vagy -1. Bizonyítsa be, hogy ha

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + \ldots + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0,$$

akkor az n szám 4-gyel osztható.

Kekeňák Szilvia (Kassa)

II.2. 10. osztály

10/1. feladat Egy diák megírt már néhány dolgozatot, és az utolsó megírása előtt számolgat: Ha az utolsót 97 pontosra írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor 87 pont lesz az átlagom. Hány dolgozatot írt eddig a diák, és mennyi volt az átlagpontszáma?

Katz Sándor (Bonyhád)

10/2. feladat Hányféleképpen lehet sorrendbe állítani a RENDETLENÜL szó betűit úgy, hogy ne álljon két E betű egymás mellett? (Minden betűt pontosan egyszer használunk fel.)

Bálint Béla (Zsolna)

10/3. feladat Adott a síkban két egymásra merőleges egyenes, f és g, valamint a g egyenesen két pont, A és B, amelyek egymástól is és a két egyenes metszéspontjától is különböznek. Az f egyenes egy tetszőleges P pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre merőlegeseket állítunk az A és B pontokban. Határozza meg a merőlegesek metszéspontjainak a halmazát, ha P végigfut az f egyenesen.

Kántor Sándorné (Debrecen)

10/4. feladat Legyen az AB átmérőjű k_1 kör egy A-tól és B-től különböző pontja C. Bocsássunk merőlegest a C pontból AB-re, a merőleges talppontja T. A C középpontú, CT sugarú k_2 kör a k_1 kört a D és E pontokban metszi. A DE és CT szakaszok metszéspontja M, a CA és DE, valamint a CB és DE szakaszok metszéspontjai rendre X és Y. Bizonyítsa be, hogy $MX = MY$.

Bíró Bálint (Eger)

10/5. feladat Bizonyítsa be, hogy $n + 1$ darab különböző, $2n$-nél kisebb pozitív egész szám közül kiválasztható három különböző úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.

Bencze Mihály (Bukarest)

10/6. feladat Képezzük az $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ halmaz minden nemüres részhalmazát. Az egy részhalmazban lévő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. (Ha a halmaz egyelemű, akkor egytényezős szorzatnak tekintjük és ennek vesszük a reciprokát.) Mekkora az így kapott összeg?

Kántor Sándor (Debrecen)

II.3. 11. osztály

11/1. feladat Egy háromszög három oldalának mérőszáma, a, b, c ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsa be, hogy $a^2 + c^2 < 3ac$.

Minda Mihály (Vác)

11/2. feladat Egy interneten lebonyolított bajnokságon minden résztvevő minden másik résztvevővel pontosan kétszer játszott. Egy mérkőzésen a győztes 2, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékosnak 1-1 pont járt. Az eredménylista összeállítói meglepve tapasztalták, hogy az utolsó helyezett kivételével minden versenyző pontszáma úgy adódik, hogy a közvetlenül mögötte végző pontszámához mindig ugyanazt a páros számot hozzáadjuk. A győztes 2016 pontot szerzett. Hányan vettek részt a versenyen?

Tóth Sándor (Kisvárda)

11/3. feladat Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög α. Az AB átfogóhoz tartozó magasság az átfogót a D pontban metszi. Az ADC háromszögbe olyan $DEFG$ négyzetet rajzolunk, amelynek E, F és G csúcsai rendre DC-re, CA-ra és AD-re illeszkednek, a CDB háromszögbe pedig olyan $DHIJ$ négyzetet, amelynek H, I és J csúcsai DB-re, BC-re és CD-re esnek. Jelölje t_1 és t_2 a $DEFG$, illetve a $DHIJ$ négyzet területét. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{t_1}{t_1 + t_2}}.$$

Bíró Bálint (Eger)

11/4. feladat Az a_n sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = n\,(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})$, ha $n \geq 2$. Határozza meg a_{2016} értékét.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)
Szoldatics József (Budapest)

11/5. feladat Jelölje p_n az n-edik prímszámot ($p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$). Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész szám esetén

$$\frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_2p_3} + \ldots + \frac{1}{p_np_{n+1}} < \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály (Bukarest)

11/6. feladat Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsán áthaladó kör az AB, AD oldalakat és az AC átlót rendre az M, N, illetve K pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$AB \cdot AM + AD \cdot AN = AC \cdot AK.$$

Róka Sándor (Nyíregyháza)

II.4. 12. osztály

12/1. feladat Az ABC szabályos háromszög köré írt körön a rövidebb AB íven kijelölünk egy M pontot. Bizonyítsa be, hogy $AB^2 \geq 3 \cdot AM \cdot MB$.

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

12/2. feladat Az ötös lottón 5 számot kell megjelölni az $1, 2, \ldots, 90$ számok közül. Peti egy olyan szelvénnyel játszik, amelyen az 5 megjelölt számban az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel, és a 0 számjegy nem fordul elő. Petinek szól a barátja, hogy az aznapi sorsoláson ilyen 5 számot húztak ki, de magukról a kihúzott számokról nem tud semmit sem mondani. Mi a valószínűsége annak, hogy Petinek legalább 4 találata van?

Remeténé Orvos Viola (Debrecen)

12/3. feladat Igazolja, hogy $1992 \cdot 2012 \cdot 2016 \cdot 2022 \cdot 2042 + 5^6$ összetett szám.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

12/4. feladat Igazolja, hogy ha a P polinom minden együtthatója nemnegatív valós szám, akkor $x > 0$ esetén $P(x)P(\frac{1}{x}) \geq (P(1))^2$.

Kekeňák Szilvia (Kassa)

12/5. feladat Egy konvex négyszög oldalainak és átlóinak hossza racionális szám. Mutassa meg, hogy az átlókat a metszéspontjuk racionális hosszúságú szakaszokra osztja.

Tóth Sándor (Kisvárda)

12/6. feladat Oldja meg az $x^3 + 2 = 5\sqrt[3]{5x-2}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)

III. fejezet

Megoldások

III.1. 9. osztály

9/1. feladat Nevezzünk egy számot prímösszegűnek, ha a tízes számrendszerben felírt szám számjegyeinek összege prímszám. Legfeljebb hány prímösszegű szám lehet öt egymást követő pozitív egész szám között?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

1. megoldás: Az öt szám között van három olyan, amely ugyanabba a tízes blokkba tartozik. (3 pont)

Ez a három szám egymástól csak az utolsó számjegyben különbözik, a számjegyösszegeiket kiszámolva tehát három egymást követő számot kapunk. (2 pont)

Három egymást követő szám nem lehet mind prímszám, tehát az ugyanabba a tízes blokkba tartozó három szám nem lehet mind prím. Ezért az öt egymást követő egész szám között legfeljebb négy prímösszegű szám lehet. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy létezik öt olyan egymást követő egész szám, amelyek között négy prímösszegű szám van. Ilyenek például: $199, 200, 201, 202, 203$, ahol a számjegyösszegek rendre $19, 2, 3, 4, 5$; vagy $197, 198, 199, 200, 201$, ahol a számjegyösszegek rendre $17, 18, 19, 2, 3$.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Egy szám számjegyösszege 3-mal osztva ugyanannyi maradékot ad, mint maga a szám. Öt egymást követő szám számjegyösszegei között tehát mindig van 3-mal osztható. (1 pont)

Ha a 3-mal osztható számjegyösszeg nem prím, akkor legfeljebb négy prímösszegű számunk lehet. Mind az öt összeg csak úgy lehet prím, ha a 3-mal osztható számjegyösszeg a 3.

(1 pont)

Egy n szám számjegyösszege háromféleképpen lehet 3: egy 3-as után valahány 0; egy 2-es, egy 1-es és valahány 0; vagy három 1-es és valahány 0. (1 pont)

Az n végződése tehát $0, 1, 2$ vagy ($n = 3$ esetén) 3.

Ezért $n+1$ számjegyösszege mindegyik esetben 4 (hiszen nem történik tízes átlépés), vagyis nem prím. Mind az öt összeg csak úgy lehet prím, ha n az ötödik helyen álló szám.

(2 pont)

Az ötödik helyen álló n szám nem lehet a 3, mert akkor a számok között negatív számok is lennének.

Minden más esetben n legalább kétjegyű. A hárommal osztható $n-3$ szám végződése 7, 8 vagy 9, számjegyeinek összege nem lehet 3, ezért nem prím. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy létezik öt olyan egymást követő egész szám, amelyek között négy prímösszegű szám van. Ilyenek például: 199, 200, 201, 202, 203, ahol a számjegyösszegek rendre 19, 2, 3, 4, 5; vagy 197, 198, 199, 200, 201, ahol a számjegyösszegek rendre 17, 18, 19, 2, 3. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

3. megoldás: Két egymást követő szám számjegyösszege tízes átlépéskor lehet azonos paritású (pl. 9, 10 vagy 19, 20), máskor mindig különböző, mert csak az utolsó számjegy különbözik 1-gyel. Öt egymást követő szám számjegyösszegei között ezért mindig van legalább két páros. (2 pont)

Ez a két páros szám csak úgy lehetne egyaránt prím, ha mindegyikük 2. Egy n szám jegyeinek összege kétféleképpen lehet 2: egy 2-es után valahány 0; vagy két 1-es és valahány 0. (1 pont)

A szám végződése tehát $0, 1$ vagy ($n = 2$ esetén) 2.

Ha $n = 2$, akkor az $n + 2 = 4$ is a számok között van, amely nem prím.

Minden más esetben az $n+1$-től $n+4$-ig terjedő számok számjegyösszege nagyobb, mint az n számjegyösszege. Az $n-4$-től $n-1$-ig terjedő számoknak vagy 1 a számjegyösszege, vagy pedig jegyeik között van 6, 7, 8 vagy 9, egyik esetben sem lehet az összeg 2.

Nincs tehát $n-4$-től $n+4$-ig más olyan szám, amelyben a számjegyösszeg 2.

Ezért az öt egymást követő egész szám között legfeljebb négy prímösszegű szám lehet.

(4 pont)

Megmutatjuk, hogy létezik öt olyan egymást követő egész szám, amelyek között négy prímösszegű szám van. Ilyenek például: 199, 200, 201, 202, 203, ahol a számjegyösszegek rendre 19, 2, 3, 4, 5; vagy 197, 198, 199, 200, 201, ahol a számjegyösszegek rendre 17, 18, 19, 2, 3. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

9/2. feladat Melyek azok az x egész számok, amelyekre $x^2 + 3x + 24$ négyzetszám?

Szabó Magda (Zenta–Szabadka)

1. megoldás: Keressük az $x^2 + 3x + 24 = y^2$ egyenlet egész megoldásait. Ezt 4-gyel szorozva: $4x^2 + 12x + 96 = 4y^2$. (2 pont)

Átrendezve:

$$(2x+3)^2 + 87 = 4y^2$$
$$(2x+3)^2 - 4y^2 = -87.$$

Szorzattá alakítva:

$$(2x+3-2y)(2x+3+2y)=-87. \qquad \text{(2 pont)}$$

A 87 osztói ±1, ±3, ±29, ±87, a két tényező ezek közül kerülhet ki. Feltehetjük, hogy y pozitív, ekkor a második tényező a nagyobb. Megoldandók tehát a következő egyenletrendszerek:

$$\begin{cases} 2x+3-2y=-1 \\ 2x+3+2y=87, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3-2y=-3 \\ 2x+3+2y=29, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3-2y=-29 \\ 2x+3+2y=3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3-2y=-87 \\ 2x+3+2y=1. \end{cases} \qquad \text{(3 pont)}$$

Ezek megoldása rendre:

$$\begin{array}{cccc} x=20 & x=5 & x=-8 & x=-23 \\ (y=22), & (y=8), & (y=8), & (y=22). \end{array}$$

A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Keressük az $x^2+3x+24=y^2$ egyenlet egész megoldásait. Ezt 4-gyel szorozva: $4x^2+12x+96=4y^2$. (2 pont)

Átrendezve:

$$(2x+3)^2+87=4y^2$$
$$4y^2-(2x+3)^2=87.$$

Két négyzetszám különbsége 87. Tudjuk, hogy az egymást követő négyzetszámok különbségei a páratlan számok, 87 tehát valahány egymást követő páratlan szám összege.

(2 pont)

A 87 páratlan, tehát páratlan darab páratlan számot keresünk, ezek összege osztható a tagok számával. A 87 osztói $1, 3, 29, 87$. A tagok száma lehet 1 és lehet 3, de 29 vagy 87 nem lehet. (2 pont)

Egy tag esetén: $87=44^2-43^2$, ekkor $2x+3=43$, azaz $x=20$; vagy $2x+3=-43$, azaz $x=-23$.

Három tag esetén: $87=27+29+31=16^2-13^2$, ekkor $2x+3=13$, azaz $x=5$; vagy $2x+3=-13$, azaz $x=-8$.

A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

(3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

3. megoldás: Keressük az $x^2+3x+24$ négyzetszámot $(x+k)^2=x^2+2kx+k^2$ alakban. Ekkor $3x+24=2kx+k^2$. Átrendezve: $x(2k-3)=24-k^2$, vagyis $2k-3 \mid k^2-24$.

(3 pont)

Ekkor $2k-3 \mid 2k^2-48$ következik, és $2k-3 \mid 2k^2-3k$ is nyilván igaz. Ezekből $2k-3 \mid$ $\mid 48-3k$, ezért $2k-3 \mid 96-6k$. Ugyanakkor $2k-3 \mid 9-6k$, tehát $2k-3 \mid 96-9=87$.

(4 pont)

A 87 osztói $+1$, -1, $+3$, -3, $+29$, -29, $+87$, -87, ezek közül kerülhet ki $2k-3$. Ekkor k értéke rendre 2, 1, 3, 0, 16, -13, 45, -42, innen x értéke rendre 20, -23, 5, -8, -8, 5, -23, 20.
A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

4. megoldás: Keressük az $x^2+3x+24=y^2$ egyenlet egész megoldásait. Átrendezve: $x^2+3x+(24-y^2)=0$. A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(24-y^2)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{4y^2-87}}{2}.$$

Így x csak akkor lehet egész, ha $4y^2-87$ négyzetszám: $4y^2-87=n^2$. (3 pont)
Átrendezve:

$$\begin{aligned}4y^2-n^2&=87\\(2y-n)(2y+n)&=87.\end{aligned}$$ (1 pont)

Feltehetjük, hogy y és n pozitív, ekkor a második tényező a nagyobb, és pozitív. A 87 pozitív osztói: $1,3,29,87$. Megoldandók tehát a következő egyenletrendszerek:

$$\begin{cases}2y-n=1\\2y+n=87,\end{cases}\qquad\begin{cases}2y-n=3\\2y+n=29.\end{cases}$$ (3 pont)

Ezek megoldásai rendre: $y=22$, ekkor $x=-23$ vagy $x=20$; illetve $y=8$, ekkor $x=-8$ vagy $x=5$.
A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

9/3. feladat Bizonyítsa be, hogy az

$$(n^2+7n)(n^2+7n+6)(n^2+7n+10)(n^2+7n+12)$$

kifejezés minden egész n esetén osztható 2016-tal.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)
Szoldatics József (Budapest)

1. megoldás: Alakítsuk szorzattá a tényezőket: (1 pont)

$$\begin{aligned}n^2+7n&=n(n+7)\\n^2+7n+6&=n^2+n+6n+6=(n+1)(n+6)\\n^2+7n+10&=n^2+2n+5n+10=(n+2)(n+5)\\n^2+7n+12&=n^2+3n+4n+12=(n+3)(n+4).\end{aligned}$$ (2 pont)

A kérdéses kifejezés tehát $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)$ alakban írható. Ez 8 egymást követő egész szám szorzata. (1 pont)

Belátjuk, hogy a szorzat osztható $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$-tal. (1 pont)

A 8 egymást követő szám között biztosan van 7-tel osztható, így a szorzat osztható 7-tel. (1 pont)

Van közöttük legalább 2 darab 3-mal osztható, így a szorzat osztható 3^2-nel. (1 pont)

Van 4 darab páros szám és van 4-gyel is osztható, ezzel megvan a hiányzó 2-es prímtényező, így a szorzat osztható 2^5-nel. (2 pont)

A kifejezés tehát osztható 2016-tal.

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Belátjuk, hogy a szorzat osztható $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$-tel. (1 pont)

Vizsgáljuk sorban a 2^5, 3^2, illetve 7 tényezőkkel való oszthatóságot.
Mivel n^2 és $7n$ azonos paritású, mind a négy tényező páros. Az n^2+7n és n^2+7n+6 különböző maradékot adnak 4-gyel osztva, egyikük tehát 4-gyel osztható, ezzel megvan a hiányzó 2-es prímtényező, így a szorzat osztható 2^5-nel. (2 pont)

Ha $n = 3k$ alakú, akkor n^2+7n és n^2+7n+6 egyaránt osztható 3-mal, így a szorzat osztható 3^2-nel.
Ha $n = 3k-1$ alakú, akkor n^2-nek a 3-as maradéka 1, $7n$-nek a 3-as maradéka -1. Az n^2+7n és n^2+7n+6 tehát ilyenkor is osztható 3-mal, így a szorzat osztható 3^2-nel.
Ha $n = 3k+1$ alakú, akkor $n^2+7n+10 = 9k^2+6k+1+21k+7+10 = 9k^2+27k+18 = 9(k^2+3k+2)$, ez 9-cel osztható, így a szorzat is osztható 3^2-nel. (3 pont)

A 7-tel való oszthatóság szempontjából elég az n^2, n^2+6, n^2+10, n^2+12 számokat vizsgálni.
Ha $n = 7k$ alakú, akkor n^2 osztható 7-tel.
Ha $n = 7k \pm 1$ alakú, akkor n^2-nek a 7-es maradéka 1, tehát n^2+6 osztható 7-tel.
Ha $n = 7k \pm 2$ alakú, akkor n^2-nek a 7-es maradéka 4, tehát n^2+10 osztható 7-tel.
Ha $n = 7k \pm 3$ alakú, akkor n^2-nek a 7-es maradéka 2, tehát n^2+12 osztható 7-tel.
(3 pont)

A kifejezés tehát osztható $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$-tal.

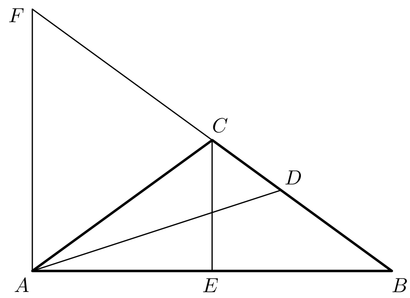
(+1 pont)

Összesen: 10 pont

9/4. feladat Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögének felezője kétszer olyan hosszú, mint a szárak szögének felezője. Mekkorák a háromszög szögei?

Katz Sándor (Bonyhád)

1. megoldás: Legyen a szóban forgó ABC háromszögben $AC = BC$, valamint AD és CE a két szögfelező szakasz, a feltevés szerint $AD = 2 \cdot CE$. Legyen $\alpha = BAC\sphericalangle = CBA\sphericalangle$.



Állítsunk merőlegest az AB alapra az A pontban, jelölje F ennek metszéspontját a BC egyenessel. Mivel az E pont felezi az AB szakaszt, a párhuzamos szelők tétele miatt (vagy az EBC és ABF háromszögek hasonlósága folytán) $FA = 2 \cdot CE$. (3 pont)

Az FAD háromszög tehát egyenlő szárú, és ezért $AFD\sphericalangle = ADF\sphericalangle$. (2 pont)

Ezek a szögek α-val kifejezhetők az ABF és az ABD háromszög szögösszegét felhasználva:

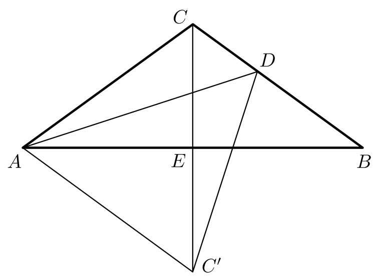
$$AFD\sphericalangle = 90° - \alpha, \quad \text{illetve} \quad ADF\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \alpha\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az α szögre ezekből a $90° - \alpha = (3/2)\alpha$ egyenletet kapjuk, ahonnan $\alpha = 36°$. A háromszög szögei tehát 36°, 36° és 108°. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Használjuk az 1. megoldásban bevezetett A, B, C, D, E és α jelöléseket. Tükrözzük a háromszög C csúcsát az AB alapra, a tükörképet jelölje C'. Ekkor $AC' \parallel CB$, így az $AC'DC$ négyszög trapéz. (1 pont)



A feltétel szerint $AD = 2 \cdot CE = CC'$, ezért az $AC'DC$ trapéz két átlója egyenlő, vagyis szimmetrikus trapézról van szó. (2 pont)

Szimmetrikus trapézban az átlók egyenlő szögeket zárnak be az alapokkal, ezért $C'AD\sphericalangle =$ $= AC'C\sphericalangle$. (2 pont)

Ezek a szögek α-val kifejezve:

$$C'AD\sphericalangle = C'AB\sphericalangle + BAD\sphericalangle = \alpha + \frac{\alpha}{2} \quad \text{és} \quad AC'C\sphericalangle = ACC'\sphericalangle = 90° - \alpha, \qquad \text{(2 pont)}$$

ahonnan $(3/2)\alpha = 90° - \alpha$, azaz $\alpha = 36°$. A háromszög szögei tehát 36°, 36° és 108°.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

9/5. feladat Adva van a síkban 2016 olyan pont, hogy minden ponthármasból kiválasztható két pont, amelyek 1 egységnél kisebb távolságra vannak egymástól. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan egységsugarú kör, amely a 2016 pont közül legalább 1008-at tartalmaz.

Bálint Béla (Zsolna)

1. megoldás: Ha a pontok között nincs két olyan pont, amelyek távolsága legalább 1, akkor készen vagyunk, a megadott pontok közül bármelyik körül rajzolt egységsugarú kör megfelel. (2 pont)

Ha az A és B pontok távolsága legalább 1, akkor tekintsük az A, illetve B középpontú egységsugarú köröket. (2 pont)

Ha egy C pont egyik körben sincs benne, akkor az ABC ponthármas ellentmond a feladat feltételeinek. (2 pont)

A 2016 pontnak tehát mindegyike benne van a két kör közül legalább az egyikben. Nem lehet mindkét körben 1008-nál kevesebb pont. (Legalább) az egyik kör tehát legalább 1008 pontot tartalmaz. (3 pont)

Létezik tehát olyan egységsugarú kör, amely a 2016 pont közül legalább 1008-at tartalmaz. (+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Legyen A a 2016 pont egyike. Tekintsük az A körüli egységsugarú kört. Ha ebben van legalább 1008 pont, akkor készen vagyunk. (2 pont)

Ha nincs, akkor legyen B és C két pont a körön kívül lévő legalább 1009 pont közül. (2 pont)

Mivel AB és AC nagyobb 1-nél, a feladat feltétele szerint $BC < 1$. (2 pont)

Ugyanígy bármely két kívül lévő pont távolsága 1-nél kisebb. A kívül lévő pontokat ezért tartalmazza például a B körüli egységsugarú kör. (3 pont)

Létezik tehát olyan egységsugarú kör, amely a 2016 pont közül legalább 1008-at tartalmaz. (+1 pont)

Összesen: 10 pont

9/6. feladat Az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ számok mindegyikének értéke $+1$ vagy -1. Bizonyítsa be, hogy ha

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + \ldots + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0,$$

akkor az n szám 4-gyel osztható.

Kekeňák Szilvia (Kassa)

1. megoldás: Az összeg mindegyik tagja $+1$ vagy -1. (1 pont)

Nézzük meg, mi történik, ha az egyik szám, x_i előjelét megváltoztatjuk. (2 pont)

Az x_i szám az összeg négy tagjában szerepel, ezen tagok előjele fog megváltozni.
Ha mind a négy tag azonos előjelű, az összeg (valamelyik irányban) 8-cal változik.

Ha három tag azonos előjelű és a negyedik különböző, akkor az összeg (valamelyik irányban) $6 - 2 = 4$-gyel változik.
Ha két-két tag pozitív, illetve negatív előjelű, az összeg nem változik. (3 pont)

Az egyes számok előjelének megváltoztatása tehát az összeg 4-es maradékát nem befolyásolja. Ha minden szám értékét $+1$-re változtatjuk, az összeg értéke n lesz. Mivel az összeg eredetileg 0 volt, azaz 4-gyel osztható, n is osztható 4-gyel. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Az n-tagú összeg mindegyik tagja $+1$ vagy -1. (1 pont)

Az összeg csak úgy lehet 0, ha n páros. Megmutatjuk, hogy n nem lehet $4k + 2$ alakú.

(2 pont)

Tegyük fel, hogy $n = 4k + 2$, és jelölje a tagokat $a_1 = x_1x_2x_3x_4$, $a_2 = x_2x_3x_4x_5, \ldots,$ $a_{4k+1} = x_{4k+1}x_{4k+2}x_1x_2$, $a_{4k+2} = x_{4k+2}x_1x_2x_3$. A páratlan indexű tagok szorzata és a páros indexű tagok szorzata megegyezik (mindkét szorzatban kétszer szerepel az összes x_i szám mindegyike):

$$a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_{4k+1} = a_2a_4 \cdot \ldots \cdot a_{4k+2}. \qquad (3 \text{ pont})$$

Mivel a tagok összege 0, ugyanannyi $+1$ és -1 van közöttük, vagyis páratlan számú. A páratlan számú -1 közül tehát a fenti egyenlőség egyik oldalán páros, a másikon páratlan sok van. Így nem állhat fenn egyenlőség, ellentmondásra jutottunk. Az n szám nem lehet $4k + 2$ alakú, tehát 4-gyel osztható. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

3. megoldás: Az n-tagú összeg mindegyik tagja $+1$ vagy -1. (1 pont)

Az összeg csak úgy lehet 0, ha n páros. Ekkor ugyanannyi $+1$, illetve -1 tagja van. Megmutatjuk, hogy a -1 tagok száma nem lehet páratlan. (2 pont)

Tegyük fel, hogy páratlan számú -1 (és ugyanannyi $+1$) tag van. A -1 tagok szorzata ekkor $P_1 = -1$, a $+1$ tagoké nyilván $P_2 = +1$. (2 pont)

Az x_i számok között biztosan van -1 értékű, hiszen különben az összeg 0 helyett n lenne. Tekintsünk egy ilyen x_i-t. Összesen négy tagban szerepel x_i. Nézzük, hogy ezen négy tag közül hány szerepel a P_1, illetve a P_2 szorzat tényezői között: A négy tag megoszlása lehet $4 + 0$, $3 + 1$, $2 + 2$, $1 + 3$ vagy $0 + 4$. A négy tag mindegyik esetben ugyanolyan előjelű járulékot ad a P_1 és P_2 szorzatokhoz. A két szorzat előjele tehát nem lehet különböző, ellentmondásra jutottunk. Az n szám ezért 4-gyel osztható. (4 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

III.2. 10. osztály

10/1. feladat Egy diák megírt már néhány dolgozatot, és az utolsó megírása előtt számolgat: Ha az utolsót 97 pontosra írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor 87 pont lesz az átlagom. Hány dolgozatot írt eddig a diák, és mennyi volt az átlagpontszáma?

Katz Sándor (Bonyhád)

1. megoldás: Ha a diák eddig x dolgozatot írt, és az átlaga y pont, akkor xy pontja van. (1 pont)

Ha az utolsó dolgozatot 97 pontra írja, akkor az átlaga

$$\frac{xy+97}{x+1}=90,$$

ha 73 pontra, akkor

$$\frac{xy+73}{x+1}=87. \qquad (2 \text{ pont})$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\begin{aligned} xy+97&=90x+90\\ xy+73&=87x+87. \end{aligned} \qquad (1 \text{ pont})$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$\begin{aligned} 24&=3x+3\\ x&=7. \end{aligned} \qquad (2 \text{ pont})$$

Így $xy=90x-7=623$, $y=623/7=89$. Tehát a diák eddig 7 dolgozatot írt és az átlaga 89 pont volt. (2 pont)

Ellenőrzés: A dolgozatok átlaga $(623+97)/8=90$ és $(623+73)/8=87$ lehet az utolsó dolgozat megírása után, tehát a megoldás megfelel a feltételeknek. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Ha az utolsó dolgozaton 97 pont helyett 73 pontot szerez a diák, akkor az összpontszáma 24-gyel lesz kevesebb. (3 pont)

Az átlag így 90-ről 87-re csökken, azaz 3 ponttal lesz kisebb. Ez csak úgy lehetséges, ha az átlagot 8 dolgozatra számoljuk. (3 pont)

Tehát eddig 7 dolgozatot írt a diák. (1 pont)

Az utolsó dolgozat írása előtt $90\cdot 8-97=623$ volt az összpontszáma, az átlaga pedig $623/7=89$ pont. (1 pont)

Ellenőrzés: Ha a 623 ponthoz a 8. dolgozattal 73 pontot szerez a diák, akkor valóban $(623+73)/8=87$ pont lesz az átlaga. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

10/2. feladat Hányféleképpen lehet sorrendbe állítani a RENDETLENÜL szó betűit úgy, hogy ne álljon két E betű egymás mellett? (Minden betűt pontosan egyszer használunk fel.)

Bálint Béla (Zsolna)

1. megoldás: Először rendezzük el az E-től különböző betűket, nyolc betűt, köztük két-két azonosat: R D T Ü N N L L. (2 pont)
A 8 betűt 8! féle módon rendezhetjük sorba, de a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{8!}{2 \cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez. (3 pont)
Az E betűket az így kialakult „szó” elé, utána vagy a betűk közé, tehát 9 helyre tehetjük le. 9 helyből kell kiválasztanunk 3-at úgy, hogy a sorrend nem számít. Ez $\binom{9}{3}$ lehetőség. (3 pont)

Ezért $\frac{8!}{4} \cdot \binom{9}{3} = 10\,080 \cdot 84 = 846\,720$ esetet kapunk. (1 pont)

(+1 pont)
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A végeredményt elfogadjuk $\frac{8!}{4} \cdot \binom{9}{3}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

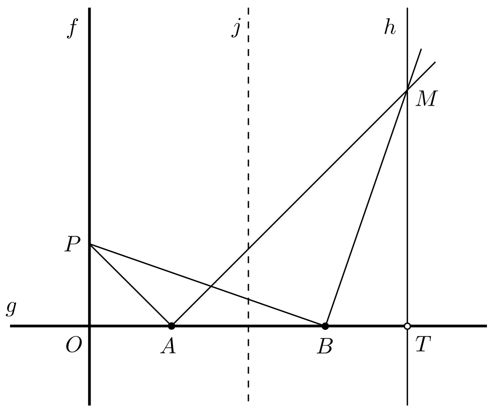
2. megoldás: A RENDETLENÜL szó 11 betűből áll, ezek között van három E betű, két N betű és két L betű. A 11 betűt 11! féle módon rendezhetjük sorba, a három E betűt, a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez. (2 pont)
Ezek között azok az esetek, amelyekben egymás mellett szerepelnek E betűk, számunkra rosszak, amelyeket le fogunk vonni. Ha két E betű szerepel egymás mellett, akkor tekintsük ezeket egy karakternek, a harmadik E betűt pedig egy szimpla jelnek. (2 pont)
Most 10 karaktert rendezünk sorba, köztük kettő-kettő azonos. Ilyen eset $\frac{10!}{2 \cdot 2}$ van. (1 pont)
Ha három E betű szomszédos, akkor előbb az ilyen eseteket kétszer számoltuk, tehát ezek számát majd vissza kell adnunk. (1 pont)
Legyen most EEE egyetlen jel, ilyen eset $\frac{9!}{2 \cdot 2}$ van. (2 pont)
A feladat feltételeinek megfelelő sorbarendezések száma $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2} - \frac{10!}{2 \cdot 2} + \frac{9!}{2 \cdot 2} = 846\,720.$ (1 pont)
(+1 pont)
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A végeredményt elfogadjuk $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2} - \frac{10!}{2 \cdot 2} + \frac{9!}{2 \cdot 2}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

10/3. feladat Adott a síkban két egymásra merőleges egyenes, f és g, valamint a g egyenesen két pont, A és B, amelyek egymástól is és a két egyenes metszéspontjától is különböznek. Az f egyenes egy tetszőleges P pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre merőlegeseket állítunk az A és B pontokban. Határozza meg a merőlegesek metszéspontjainak a halmazát, ha P végigfut az f egyenesen.

Kántor Sándorné (Debrecen)

1. megoldás: Jelöljük O-val f és g metszéspontját. A feladat szerinti M metszéspont minden olyan esetben előáll, amikor $P \neq O$, hiszen ilyenkor PA és PB nem párhuzamos, és így a rájuk állított merőlegesek sem azok. (1 pont)



Legyen T az M pont merőleges vetülete a g egyenesen. Ekkor az ATM, BTM, PAM, PBM, POA és POB derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételt fölírva

$$\begin{aligned} AT^2 - BT^2 &= (AM^2 - TM^2) - (BM^2 - TM^2) = AM^2 - BM^2 = \\ &= (PM^2 - PA^2) - (PM^2 - PB^2) = PB^2 - PA^2 = \\ &= (PO^2 + OB^2) - (PO^2 + OA^2) = OB^2 - OA^2 \end{aligned}$$

adódik, ami nem függ P választásától. (2 pont)

Azt állítjuk, hogy a T talppontot az $AT^2 - BT^2$ mennyiség egyértelműen meghatározza. Valóban, ha a g egyenes mentén az O, A, B és T pontot rendre a 0, a, b és x koordináta adja meg, akkor

$$b^2 - a^2 = OB^2 - OA^2 = AT^2 - BT^2 = (x-a)^2 - (x-b)^2 = 2(b-a)x + a^2 - b^2,$$

ahonnan $a \neq b$ miatt x egyértelműen kifejezhető:

$$x = \frac{2b^2 - 2a^2}{2(b-a)} = a + b. \qquad (2 \text{ pont})$$

Az összes M metszéspont ezért a g egyenesre ugyanabban a T pontban állított h merőleges egyenesre illeszkedik. (1 pont)

Ez a T pont az $x = a + b$ összefüggés miatt az O pontnak az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe. (1 pont)

A h egyenesen tetszőlegesen kiszemelt $M \neq T$ pontból kiindulva a feladat konstrukcióját P és M szerepcseréjével végrehajtva visszakapjuk P-t. Ezért magát a T pontot kivéve a h egyenes minden pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Használjuk az 1. megoldás jelöléseit. Ha $P \neq O$, akkor az M pont előáll, (1 pont)
valamint az A, B pontok a PM átmérőjű körre illeszkednek, hiszen a PM szakasz A-ból is és B-ből is derékszög alatt látszik. (2 pont)

Az AB szakasz ennek a körnek húrja, tehát az azt merőlegesen felező j egyenes áthalad a kör középpontján, vagyis PM felezőpontján. (2 pont)

Ezért M rajta van az f egyenes j-re vonatkozó tükörképén, a h egyenesen. (1 pont)

Az M pont biztosan különbözik g és h metszéspontjától, azaz a T ponttól, hiszen a g egyenesnek a körrel csak két közös pontja (A és B) lehet. (1 pont)

Megfordítva, ha a h egyenesen kiszemelt M pont különbözik T-től, akkor tekintsük az A, B és M (nem kollineáris) pontokon áthaladó kört, és annak az M-mel átellenes P pontját. Ez a P egyrészt illeszkedik f-re, másrészt P-ből kiindulva a feladat konstrukciójával M-et származtatja. Ezért a T pont kivételével h minden pontja előáll M-ként. (2 pont)

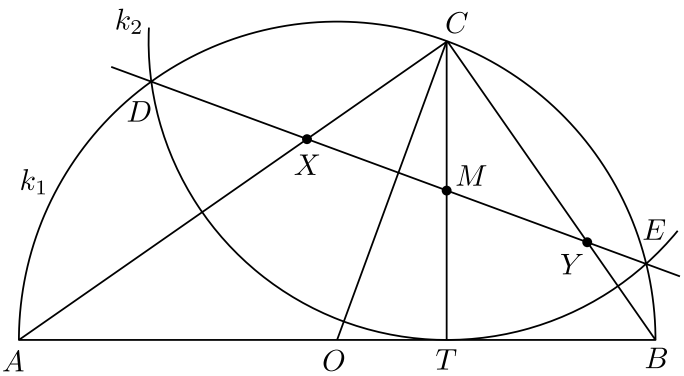
(+1 pont)

Összesen: 10 pont

10/4. feladat Legyen az AB átmérőjű k_1 kör egy A-tól és B-től különböző pontja C. Bocsássunk merőlegest a C pontból AB-re, a merőleges talppontja T. A C középpontú, CT sugarú k_2 kör a k_1 kört a D és E pontokban metszi. A DE és CT szakaszok metszéspontja M, a CA és DE, valamint a CB és DE szakaszok metszéspontjai rendre X és Y. Bizonyítsa be, hogy $MX = MY$.

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AB szakasz O felezőpontja a k_1 kör középpontja. A CO szakasz a két kör középpontját köti össze, ezért merőleges a közös DE húrra. (2 pont)

Thalész tétele miatt az ABC háromszög C-nél derékszögű. (1 pont)

Az XYC szög és az OCA szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $XYC\sphericalangle = OCA\sphericalangle$. Ugyanígy $YXC\sphericalangle = OCB\sphericalangle$. (1 pont)

A CAO háromszög egyenlő szárú, ezért $OCA\sphericalangle = CAO\sphericalangle$. Ugyanígy $OCB\sphericalangle = OBC\sphericalangle$. (1 pont)

A CAB szög és a BCT szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $CAB\sphericalangle = BCT\sphericalangle$. Ugyanígy $ABC\sphericalangle = TCA\sphericalangle$. (1 pont)

Az egyenlőségeket összevetve $MYC\sphericalangle = MCY\sphericalangle$ és $MXC\sphericalangle = MCX\sphericalangle$ következik, (1 pont)

ami azt jelenti, hogy a CXM és a CYM háromszögek egyenlő szárúak. A szárak egyenlősége folytán $MX = MC = MY$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

10/5. feladat Bizonyítsa be, hogy $n+1$ darab különböző, $2n$-nél kisebb pozitív egész szám közül kiválasztható három különböző úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.

Bencze Mihály (Bukarest)

Megoldás: Legyen az adott $n+1$ szám: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Képezzük az $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ számokat, amelyek különbözőek, pozitívak és kisebbek, mint $2n$. (3 pont)

Tekintsük a következő $2n$ darab, $2n$-nél kisebb pozitív egész számot:

$$a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1. \qquad (2\text{ pont})$$

A skatulyaelv szerint ezek közül kettő megegyezik. (1 pont)

A feltételekből következik, hogy az egyik szám az $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ számok közül való, a másik pedig az $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ számok közül. (1 pont)

Legyenek ezek a_k és $a_m - a_1$. Ekkor $a_k = a_m - a_1$, azaz teljesül, hogy

$$a_k + a_1 = a_m. \qquad (2\text{ pont})$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

10/6. feladat Képezzük az $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ halmaz minden nemüres részhalmazát. Az egy részhalmazban lévő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. (Ha a halmaz egyelemű, akkor egytényezős szorzatnak tekintjük és ennek vesszük a reciprokát.) Mekkora az így kapott összeg?

Kántor Sándor (Debrecen)

1. megoldás: Jelöljük A_n-nel az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget.

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2,$$
$$A_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3. \qquad (2 \text{ pont})$$

Az a sejtésünk, hogy minden $n > 0$ természetes szám esetén $A_n = n$, így $A_{2016} = 2016$. Teljes indukcióval bizonyítjuk állításunkat. (1 pont)

A sejtés $n = 1$-re igaz. Feltételezzük, hogy $n = k$-ra is teljesül:

$$A_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = k. \qquad (1 \text{ pont})$$

Bizonyítjuk az állítást $n = k + 1$-re:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{k+1} + A_k \cdot \frac{1}{k+1}. \qquad (3 \text{ pont})$$

Felhasználjuk az indukciós feltételt:

$$A_{k+1} = k + \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{k+1} = k + \frac{k+1}{k+1} = k + 1. \qquad (2 \text{ pont})$$

Ezzel sejtésünket beláttuk. Tehát a keresett összeg valóban 2016.

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Jelöljük A_n-nel az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget. Ez az összeg egy többtényezős szorzat zárójelfelbontás utáni alakjára emlékeztet.

(2 pont)

Valóban, ha az alábbi szorzatban minden tagot minden taggal szorozva felbontjuk a zárójeleket, akkor az A_n-nél 1-gyel nagyobb számot kapunk:

$$A_n + 1 = (1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right). \qquad (3 \text{ pont})$$

A zárójeleken belül közös nevezőre hozva:

$$A_n + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n + 1,$$

tehát $A_n = n$. (3 pont)

A feladat kérdésére A_{2016} a válasz, amelynek az értéke a fentiek alapján 2016. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

III.3. 11. osztály

11/1. feladat Egy háromszög három oldalának mérőszáma, a, b, c ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsa be, hogy $a^2 + c^2 < 3ac$.

Minda Mihály (Vác)

1. megoldás: A háromszög-egyenlőtlenség szerint $a+b > c$ és $b+c > a$, így $b > c-a$ és $b > a - c$, ami azt jelenti, hogy $|a - c| < b$. (2 pont)

Mivel a, b és c egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $b = \sqrt{ac}$. (2 pont)

Így most $|a - c| < \sqrt{ac}$. (2 pont)

Innen négyzetre emelés (mindkét oldal nemnegatív), majd átrendezés után a kívánt $a^2 + c^2 < 3ac$ egyenlőtlenség adódik. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Mivel a háromszög-egyenlőtlenséget szokás úgy is kimondani, hogy a háromszög bármely oldala nagyobb, mint a másik két oldal különbsége, ezért a $b > c - a$ és $b > a - c$ összefüggések erre való hivatkozással is elfogadhatók.

Ha a mértani sorozat hányadosa q, akkor $b = aq$, $c = aq^2$ és a megoldás könnyen átfogalmazható ezekkel a jelölésekkel, a megfelelő pontszámok ekkor is járnak.

2. megoldás: Ha β jelöli az a és c oldalak által bezárt szöget, akkor a koszinusztétel alapján $a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2$. (2 pont)

Mivel a, b és c egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $b = \sqrt{ac}$. (2 pont)

Így most $a^2 + c^2 = ac(1 + 2\cos\beta)$. (3 pont)

Mivel $\cos\beta < 1$, ezért $a^2 + c^2 < 3ac$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

11/2. feladat Egy interneten lebonyolított bajnokságon minden résztvevő minden másik résztvevővel pontosan kétszer játszott. Egy mérkőzésen a győztes 2, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékosnak 1-1 pont járt. Az eredménylista összeállítói meglepve tapasztalták, hogy az utolsó helyezett kivételével minden versenyző pontszáma úgy adódik, hogy a közvetlenül mögötte végző pontszámához mindig ugyanazt a páros számot hozzáadjuk. A győztes 2016 pontot szerzett. Hányan vettek részt a versenyen?

Tóth Sándor (Kisvárda)

Megoldás: Legyen a résztvevők száma n, ekkor összesen $n(n-1)$ mérkőzést játszottak, és így az összpontszám $2n(n-1)$. (1 pont)

Ha az utolsó helyezett b pontot ért el, és minden versenyző d ponttal többet kapott, mint a mögötte végző, akkor az összpontszám ennek a számtani sorozatnak az összege: $\frac{(2b+(n-1)d)n}{2}$. (1 pont)

Az összpontszám kétféle felírását összevetve és rendezve $2b = (n-1)(4-d)$ adódik. (1 pont)

Innen $4 - d \geq 0$ és d párossága miatt csak $d = 2$ és 4 lehetséges. (1 pont)

A győztes pontszáma $2016 = b + (n-1)d$, ahonnan $b = 2016 - (n-1)d$. (1 pont)

Ezt a $2b = (n-1)(4-d)$ összefüggésbe beírva és rendezve $4032 = (n-1)(d+4)$ adódik. (1 pont)

Ide $d = 2$-t, illetve 4-et behelyettesítve azt kapjuk, hogy a résztvevők száma $n = 673$ vagy $n = 505$. (1 pont)

Ezek valóban megoldások, mert mindkét létszám esetén megvalósulhat a pontszámok között megadott összefüggés:

Ha $d = 4$, $n = 505$, akkor megfelel, ha mindenki mindkétszer legyőzi a nála kisebb rajtszámúakat, ekkor a pontszámok: $0, 4, 8, \ldots, 2012, 2016$. (1 pont)

Ha $d = 2$, $n = 673$, akkor megfelel, ha mindenki egyszer megveri a nála kisebb rajtszámúakat, a második mérkőzés pedig mindenhol döntetlen.
Ekkor a pontszámok: $672, 674, \ldots, 2014, 2016$. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

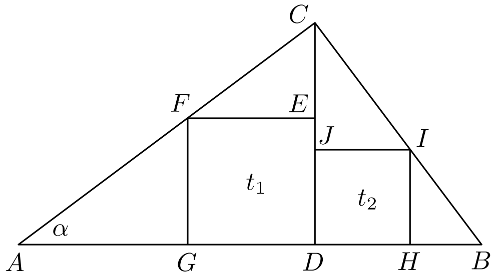
Megjegyzés: Ha d páratlan is lehet, akkor még $d = 1$ és $d = 3$ jön szóba. Az elsőre n nem lesz egész szám, a másodikból $n = 577$. Erre is teljesíthetők a pontszámokra előírt kikötések: Mivel $2b = n - 1$, így $2b + 1 (= 577)$ versenyző van, akiknek rendre b, $b + 3$, $b + 6$, $\ldots$, $7b (= 2016)$ pontot kell elérniük. Az első mérkőzésen mindenki győzze le a nála kisebb rajtszámúakat, ekkor a kapott pontszámok: $0, 2, 4, \ldots, 4b$. Ezért a második mérkőzés során rendre az alábbi pontszámokat kell megszerezniük: $b, b+1, b+2, \ldots, 3b$. Ez teljesül, ha az azonos paritású rajtszámúak döntetlenre játszanak, a különböző paritásúak mérkőzésén pedig a nagyobb rajtszámú győz.

11/3. feladat Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög α. Az AB átfogóhoz tartozó magasság az átfogót a D pontban metszi. Az ADC háromszögbe olyan $DEFG$ négyzetet rajzolunk, amelynek E, F és G csúcsai rendre DC-re, CA-ra és AD-re illeszkednek, a CDB háromszögbe pedig olyan $DHIJ$ négyzetet, amelynek H, I és J csúcsai DB-re, BC-re és CD-re esnek. Jelölje t_1 és t_2 a $DEFG$, illetve a $DHIJ$ négyzet területét. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{t_1}{t_1 + t_2}}.$$

Bíró Bálint (Eger)

1. megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



A CDB és az ADC részháromszögek hasonlók, és a hasonlóság aránya

$$\frac{CB}{AC} = \operatorname{tg}\alpha. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennél a hasonlóságnál a szóban forgó két négyzet is egymásnak van megfeleltetve,
(1 pont)
ezért területeik aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő:

$$\frac{t_2}{t_1} = \operatorname{tg}^2\alpha. \qquad \text{(2 pont)}$$

Innen a t_2/t_1 arányra a

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

képletet kapjuk, (2 pont)
amelyből átrendezéssel a feladat állítása közvetlenül következik. (2 pont)
(+1 pont)
Összesen: 10 pont

2. megoldás: Mivel $t_1 = DF^2/2$ és $t_2 = DI^2/2$, (1 pont)
ezért

$$\sqrt{\frac{t_2}{t_1+t_2}} = \sqrt{\frac{DF^2}{DF^2+DI^2}}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az FDI háromszög D-nél derékszögű, így $DF^2 + DI^2 = FI^2$. (1 pont)
A DI/DF arány egyenlő a CDB és ADC háromszögek hasonlósági arányával, azaz a CB/CA aránnyal. Ezért az FDI háromszög hasonló az ACB háromszöghöz. (2 pont)
Emiatt $CFI\sphericalangle = \alpha$, és így $\cos\alpha = DF/FI$. (1 pont)
Ezekből tehát valóban

$$\sqrt{\frac{t_2}{t_1+t_2}} = \sqrt{\frac{DF^2}{FI^2}} = \frac{DF}{FI} = \cos\alpha. \qquad \text{(2 pont)}$$

(+1 pont)
Összesen: 10 pont

11/4. feladat Az a_n sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = n\,(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})$, ha $n \geq 2$. Határozza meg a_{2016} értékét.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)
Szoldatics József (Budapest)

1. megoldás: Legyen $n \geq 3$. Alkalmazzuk $(n-1)$-re és n-re a rekurziós összefüggést:

$$a_{n-1} = (n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}), \quad \text{így} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{n-1} \qquad \text{(2 pont)}$$

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1}) = n\left(\frac{a_{n-1}}{n-1} + a_{n-1}\right) = \frac{n^2}{n-1} \cdot a_{n-1}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ezt az átalakítást tovább használva teleszkopikus szorzatot kapunk:

$$a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n-2} \cdot \frac{(n-2)^2}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{3^2}{2} \cdot a_2. \qquad \text{(3 pont)}$$

Az egyszerűsítéseket elvégezve, felhasználva az $a_2 = 2$ értéket a_n-et zárt alakban tudjuk kifejezni:

$$a_n = \frac{n \cdot n!}{2}.$$

Tehát $a_{2016} = 1008 \cdot 2016!$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Használjuk az $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ jelölést. Számoljunk ki néhány kezdőértéket:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 48, \ldots$$

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 3 = \frac{3!}{2}, \quad S_3 = 12 = \frac{4!}{2}, \ldots. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az a sejtésünk, hogy $S_n = \dfrac{(n+1)!}{2}$. Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni. (2 pont)

Az összefüggés $n = 1$-re igaz. Feltételezzük, hogy $n = k$-ra is teljesül:

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \frac{(k+1)!}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Bizonyítjuk az állítást $n = k + 1$-re.

A sorozat képzési szabálya és az indukciós feltétel alapján:

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{2} + (k+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) =$$

$$= \frac{(k+1)!}{2} + (k+1) \cdot S_k = \frac{(k+1)!}{2} \cdot (1 + k + 1) = \frac{(k+2)!}{2}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ezzel sejtésünket beláttuk.

Felhasználva a most bizonyított összefüggést:

$$a_n = n \cdot S_{n-1} = \frac{n \cdot n!}{2}.$$

Tehát $a_{2016} = 1008 \cdot 2016!$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

11/5. feladat Jelölje p_n az n-edik prímszámot ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$). Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész szám esetén

$$\frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_2p_3} + \dots + \frac{1}{p_np_{n+1}} < \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály (Bukarest)

Megoldás: Ha S_n jelöli a feladatban szereplő összeget, akkor $S_1 = 1/6 < 1/3$, különben pedig

$$2S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{p_2p_3} + \dots + \frac{2}{p_np_{n+1}},$$ (1 pont)

Mivel $p_{k+1} - p_k \geq 2$, ezért (1 pont)

$$\frac{2}{p_2p_3} + \dots + \frac{2}{p_np_{n+1}} \leq \frac{p_3 - p_2}{p_2p_3} + \dots + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_np_{n+1}},$$ (3 pont)

ahol a jobb oldalt teleszkopikus összegként írhatjuk fel:

$$\frac{p_3 - p_2}{p_2p_3} + \dots + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_np_{n+1}} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_4} + \dots + \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_{n+1}}.$$ (3 pont)

Ebből következően

$$2S_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{3},$$

ahonnan a bizonyítandó $S_n < 1/3$ egyenlőtlenséget nyerjük. (1 pont)

(+1 pont)

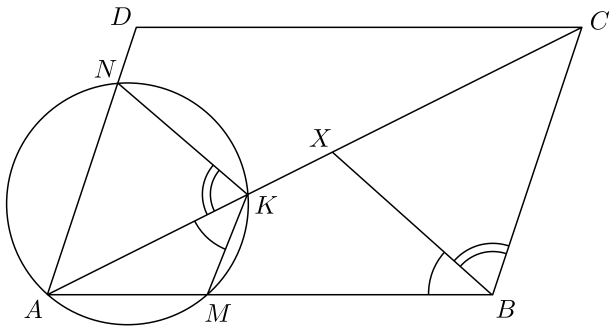
Összesen: 10 pont

11/6. feladat Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsán áthaladó kör az AB, AD oldalakat és az AC átlót rendre az M, N, illetve K pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$AB \cdot AM + AD \cdot AN = AC \cdot AK.$$

Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



A paralelogramma B-nél levő szöge is és az $AMKN$ húrnégyszög K-nál levő szöge is $180°$-ra egészíti ki az A-nál levő szöget, (1 pont)
ezért $ABC\sphericalangle = MKA\sphericalangle + AKN\sphericalangle$. Felvehetünk tehát az AC átlón egy olyan X pontot, hogy a BX szakasz az ABC szöget az $ABX\sphericalangle = MKA\sphericalangle$ és $XBC\sphericalangle = AKN\sphericalangle$ részekre bontsa fel. (3 pont)

Az AMK háromszög és az AXB háromszög hasonló, mert az A-nál levő szögük közös, és a K-nál, illetve B-nél levő szögük a konstrukció folytán egyenlő.

Emiatt

$$\frac{AM}{AK} = \frac{AX}{AB}, \quad \text{azaz} \quad AB \cdot AM = AK \cdot AX. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az ANK háromszög és a CXB háromszög hasonló, mert az A-nál, illetve C-nél levő szögük két váltószög lévén egyenlő, valamint a K-nál, illetve B-nél levő szögük a konstrukció folytán egyenlő.

Ezért

$$\frac{AN}{AK} = \frac{CX}{CB}, \quad \text{azaz} \quad (CB = AD \text{ miatt}) \quad AD \cdot AN = AK \cdot CX. \qquad \text{(2 pont)}$$

A két egyenlőséget összeadva a kívánt $AB \cdot AM + AD \cdot AN = AK \cdot (AX + CX) = AK \cdot AC$ formula adódik. (1 pont)

(+1 pont)

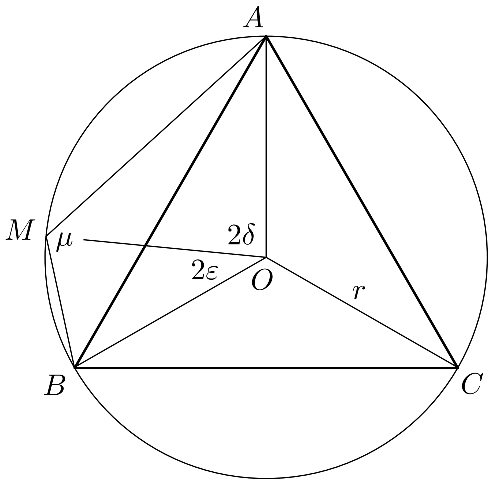
Összesen: 10 pont

III.4. 12. osztály

12/1. feladat Az ABC szabályos háromszög köré írt körön a rövidebb AB íven kijelölünk egy M pontot. Bizonyítsa be, hogy $AB^2 \geq 3 \cdot AM \cdot MB$.

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

1. megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



Fejezzük ki AB^2-et az ABM háromszögből a koszinusztétellel: (1 pont)

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos \mu,$$

ahol μ jelöli az AMB szöget. (1 pont)

Mivel az $AMBC$ négyszög húrnégyszög, és az ACB szög 60 fokos, ezért $\mu = 120°$, és így $\cos \mu = -1/2$. (1 pont)

Innen $AB^2 = AM^2 + MB^2 + AM \cdot MB$. (1 pont)

A jobb oldalt átalakítjuk:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + AM \cdot MB = (AM - MB)^2 + 3 \cdot AM \cdot MB. \qquad \text{(3 pont)}$$

Mivel $(AM - MB)^2 \geq 0$, innen a kívánt $AB^2 \geq 3 \cdot AM \cdot MB$ egyenlőtlenség adódik.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Az utolsó $3+2$ pontos rész helyettesíthető a négyzetes és a mértani közép közötti $\sqrt{\dfrac{AM^2 + MB^2}{2}} \geq \sqrt{AM \cdot MB}$ egyenlőtlenségre történő hivatkozással is.

2. megoldás: Használjuk az előző megoldás ábráját. Legyen a körülírt kör sugara r, középpontja O, és fejezzük ki az AM, MB, AB szakaszok hosszát r és a $2\delta = AOM$, $2\varepsilon = MOB$, valamint AOB szögek segítségével. (1 pont)

Az AOB szög 120 fokos, és így $\delta + \varepsilon = 60°$. (1 pont)

Az AOM, MOB és AOB egyenlő szárú háromszögekből

$$AM = 2r\sin\delta, \quad MB = 2r\sin\varepsilon, \quad AB = 2r\sin 60^\circ = r\sqrt{3}. \qquad (2 \text{ pont})$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ennek megfelelően

$$3r^2 \geq 3 \cdot 4 \cdot r^2 \sin\delta \cdot \sin\varepsilon, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{4} \geq \sin\delta \cdot \sin\varepsilon. \qquad (1 \text{ pont})$$

Az ismert trigonometrikus összefüggés alapján

$$\sin\delta \cdot \sin\varepsilon = \frac{\cos(\delta - \varepsilon) - \cos(\delta + \varepsilon)}{2}. \qquad (2 \text{ pont})$$

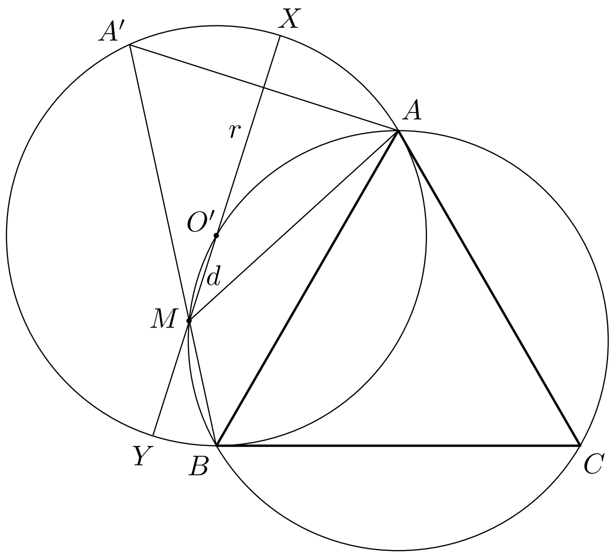
A jobb oldalt tovább alakítva, majd felülről becsülve a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sin\delta \cdot \sin\varepsilon = \frac{\cos(\delta - \varepsilon) - \cos 60^\circ}{2} \leq \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}. \qquad (2 \text{ pont})$$

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

3. megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



Hosszabbítsuk meg az MB szakaszt M-en túl MA hosszúsággal, így az A' pontot kapjuk. Mivel az AMB szög 120 fokos, ezért az AMA' szög 60 fokos, tehát $AM = A'M$ miatt az AMA' háromszög szabályos, és így az $AA'B$ szög is 60 fokos. (3 pont)

Ez azt jelenti, hogy A' rajta van az AB fölé írt (másik) 60°-os látóköríven. (1 pont)

Ez az ACB ív tükörképe, sugara tehát szintén r. (1 pont)

Ez utóbbi kör középpontját jelölje O', az $O'M$ egyenes (illetve $O' = M$ esetén, tetszőleges átmérő) messe ezt a kört az X és Y pontokban. Mivel az M ponton át húzott szelőkön a szelődarabok szorzata állandó, ezért

$$AM \cdot MB = A'M \cdot MB = XM \cdot MY = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2 \leq r^2,$$

ahol d az O' és M pontok távolsága. (3 pont)

Mivel $r^2 = AB^2/3$, az előző egyenlőtlenségből a kívánt $3 \cdot AM \cdot MB \leq AB^2$ összefüggés adódik. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

12/2. feladat Az ötös lottón 5 számot kell megjelölni az $1, 2, \ldots, 90$ számok közül. Peti egy olyan szelvénnyel játszik, amelyen az 5 megjelölt számban az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel, és a 0 számjegy nem fordul elő. Petinek szól a barátja, hogy az aznapi sorsoláson ilyen 5 számot húztak ki, de magukról a kihúzott számokról nem tud semmit sem mondani. Mi a valószínűsége annak, hogy Petinek legalább 4 találata van?

Remeténé Orvos Viola (Debrecen)

Megoldás: Határozzuk meg az ilyen típusú húzások számát. Az öt kihúzott számból egy egyjegyű, a többi kétjegyű. (1 pont)

Ha az egyjegyű szám a 9-es, akkor a kétjegyűeket egymás után leírva egy 8 különböző számjegyből álló számsorozatot kapunk, ez 8!-féle lehet. (1 pont)

Ha az egyjegyű szám nem a 9-es, akkor 8-féle lehet, a 9-es pedig csak a kétjegyűek egyes helyiértékénél szerepelhet, vagyis 4 helyen, a maradék 7 számjegy 7!-féleképpen tehető le, ez összesen $8 \cdot 4 \cdot 7! = 4 \cdot 8!$ lehetőség. (1 pont)

Mivel a kétjegyű számok egymás közötti sorrendje nem számít, ezért a fent kapott két szám összegét 4!-sal osztani kell. (1 pont)

Innen a lehetséges húzások száma $\frac{8! + 4 \cdot 8!}{4!} = \frac{5 \cdot 8!}{4!}(= 8400)$, tehát $\frac{4!}{5 \cdot 8!}$ annak a valószínűsége, hogy Petinek 5 találata van. (1 pont)

Ha Peti egyjegyű száma a 9-es, akkor 4 találat úgy lehetséges, hogy Peti egyik kétjegyű száma helyett annak „fordítottját” húzták ki (tehát a két számjegyet felcserélték), ez négyféleképpen valósulhat meg. (1 pont)

Emiatt ekkor a 4 találat 4-szer olyan valószínű, mint a telitalálat, vagyis a legalább 4 találat valószínűsége $\frac{5 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{1680}$. (1 pont)

Ha Petinél valamelyik kétjegyű számban szerepel a 9-es, akkor 4 találat úgy lehetséges, hogy Peti valamelyik másik kétjegyű száma helyett annak „fordítottját” húzták ki (tehát a két számjegyet felcserélték), ez háromféleképpen valósulhat meg. (1 pont)

Emiatt ekkor a 4 találat 3-szor olyan valószínű, mint a telitalálat, vagyis a legalább 4 találat valószínűsége $\frac{4 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{1}{2100}$. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha a feladatot úgy értelmezzük, hogy anélkül kell megmondani a valószínűséget, hogy tudnánk, hol van Petinél a 9-es, akkor a teljes valószínűség tétele alapján az imént kiszámolt két valószínűség súlyozott átlagát kell vennünk aszerint, hogy a kétféle feltétel bekövetkezésének mi a valószínűsége. A levezetés alapján ez az arány 1 : 4, tehát a kérdéses valószínűség $\frac{1}{5} \cdot \frac{5 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4 \cdot 4!}{5 \cdot 8!} = \frac{1}{2000}$.

12/3. feladat Igazolja, hogy $1992 \cdot 2012 \cdot 2016 \cdot 2022 \cdot 2042 + 5^6$ összetett szám.

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

Megoldás: Írjuk át az összeg első tagját képező öttényezős szorzatot a következő alakba:

$$(2017 - 25)(2017 - 5)(2017 - 1)(2017 + 5)(2017 + 25). \qquad \text{(3 pont)}$$

A beszorzásokat elvégezve minden tag osztható lesz 2017-tel, kivéve a

$$(-25) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 25 = -5^6$$

tagot. (3 pont)

Ennek alapján az eredményhez 5^6-t hozzáadva egy 2017-tel osztható (és 2017-nél nagyobb) számot kapunk, ami emiatt szükségképpen összetett. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

12/4. feladat Igazolja, hogy ha a P polinom minden együtthatója nemnegatív valós szám, akkor $x > 0$ esetén $P(x)P(\frac{1}{x}) \geq (P(1))^2$.

Kekeňák Szilvia (Kassa)

Megoldás: Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, ahol $a_k \geq 0$ minden k-ra. Ekkor

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_\ell}{x^\ell}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A szorzás elvégzése során $a_k a_\ell x^{k-\ell}$ alakú tagok keletkeznek, ahol $k, \ell = 0, \ldots, n$. Ha $k = \ell$, akkor ebből a_k^2 adódik, különben pedig a k, ℓ indexek cseréjével párba állíthatunk tagokat. Így

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{0 \leq \ell < k \leq n} a_k a_\ell \left(x^{k-\ell} + \frac{1}{x^{k-\ell}}\right). \qquad \text{(3 pont)}$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján pozitív x-ekre

$$x^{k-\ell} + \frac{1}{x^{k-\ell}} \geq 2\sqrt{x^{k-\ell} \cdot \frac{1}{x^{k-\ell}}} = 2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből az együtthatók nemnegativitásának felhasználásával kapjuk, hogy $x > 0$ esetén

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2 \cdot \sum_{0 \leq \ell < k \leq n} a_k a_\ell = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = (P(1))^2. \qquad \text{(3 pont)}$$

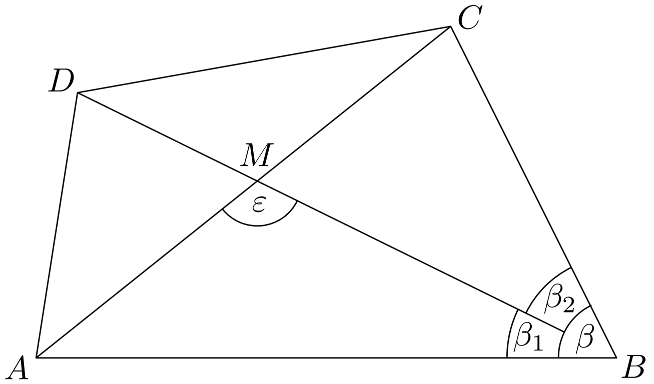
(+1 pont)
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A számtani és mértani közepek egyenlőtlenségére való hivatkozás helyettesíthető azzal, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2.

12/5. feladat Egy konvex négyszög oldalainak és átlóinak hossza racionális szám. Mutassa meg, hogy az átlókat a metszéspontjuk racionális hosszúságú szakaszokra osztja.

Tóth Sándor (Kisvárda)

Megoldás: Az ábra jelöléseit használjuk: az $ABCD$ négyszögben az átlók metszéspontja M, az ABM, CBM, CBA és AMB szögek rendre β_1, β_2, β, illetve ε. Az AM szakaszról látjuk be, hogy a hossza racionális szám, a többi ugyanígy igazolható.



Mivel $AC = AM + MC$ hossza racionális, elég az AM/MC arányról megmutatni, hogy racionális. (1 pont)

Az ABM és CBM háromszögekre felírjuk a szinusztételt:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\varepsilon}; \qquad \frac{MC}{BC} = \frac{\sin\beta_2}{\sin(180^\circ - \varepsilon)}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A két egyenlőséget elosztva, rendezve, és felhasználva, hogy $\sin\varepsilon = \sin(180^\circ - \varepsilon)$, kapjuk, hogy

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel $\dfrac{AB}{BC}$ racionális, ezért elég igazolni, hogy $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$ racionális. (1 pont)

Az ABC, ABD és BCD racionális oldalú háromszögekre felírva a koszinusztételt kapjuk, hogy $\cos\beta$, $\cos\beta_1$ és $\cos\beta_2$ is racionális. (1 pont)

Felhasználva, hogy $\cos\beta = \cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2$, innen adódik, hogy $\sin\beta_1\sin\beta_2$ is racionális. (1 pont)

Továbbá $\sin^2\beta_2 = 1 - \cos^2\beta_2$ is racionális. (1 pont)

Ezért $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \dfrac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{\sin^2\beta_2}$ is racionális, és ezt kellett bizonyítani. (1 pont)

(+1 pont)
Összesen: 10 pont

12/6. feladat Oldja meg az $x^3 + 2 = 5\sqrt[3]{5x-2}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)

1. megoldás: Vezessük be az $y = \sqrt[3]{5x-2}$ segédismeretlent. Ekkor egyrészt $y^3 + 2 = 5x$, másrészt pedig a feladatban szereplő egyenlet az $x^3 + 2 = 5y$ alakot ölti, vagyis az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} x^3 + 2 = 5y, \\ y^3 + 2 = 5x. \end{cases} \qquad (3 \text{ pont})$$

Az iménti két egyenletet egymásból kivonva $x^3 - y^3 = 5(y - x)$ adódik, amit az $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ nevezetes azonosság segítségével alakíthatunk tovább:

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 5) = 0. \qquad (1 \text{ pont})$$

Itt a szorzat második tényezője nem lehet 0, hiszen

$$x^2 + xy + y^2 + 5 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 5 > 0,$$

ezért szükségképpen $x = y$. (1 pont)

Az eredeti egyenletnek tehát csak olyan x megoldásai lehetnek, amelyekre $x = \sqrt[3]{5x-2}$, azaz $x^3 - 5x + 2 = 0$, és mivel ebben az esetben $x^3 + 2 = 5x = 5\sqrt[3]{x-2}$, ezért pontosan az ilyen tulajdonságú x-ek a megoldásai. (Ezt a pontot akkor is megkapja a versenyző, ha a megoldás végén ellenőriz.) (1 pont)

Az $x^3 - 5x + 2 = 0$ egyenletnek az $x = 2$ gyöke. (1 pont)

Ennek ismeretében

$$0 = x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x - 1),$$

ahonnan három valós gyököt kapunk: $2, -1 + \sqrt{2}$ és $-1 - \sqrt{2}$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Az $x^3 - y^3 = 5(y - x)$ egyenletet átrendezhetjük $x^3 + 5x = y^3 + 5y$ alakba is, és ekkor a $g(x) = x^3 + 5x$ függvény bevezetésével arról van szó, hogy $g(x) = g(y)$. Mivel g két szigorúan monoton növő függvény összege, ezért maga is szigorúan monoton növő (ezt abból is láthatjuk, hogy $g'(x) = 3x^2 + 5 > 0$), így szükségképpen $x = y$.

A 6. feladat kitűzésénél a gyökjel alatt az x mellől lemaradt az 5-ös szorzó. Tehát a bizottság szándéka szerint az $x^3 + 2 = 5\sqrt[3]{5x-2}$ egyenlet megoldása lett volna a cél, a kötetben leírt megoldások is erre vonatkoznak. Sajnos, az így hibásan kitűzött feladat gyökeinek a megkeresésére nem is tudunk egzakt módszert. Ezt figyelembe véve a javítás az alábbi pontozást követte: Az egyenlet két oldalán szereplő függvények helyes grafikonja: 2–2 pont; ennek alapján csak egy gyök van: 2 pont; ez -3 és -2 közé esik: 3 pont (+1 pont)=10 pont. Másik lehetőség: Az $y = \sqrt[3]{x-2}$ segédismeretlen bevezetésével az $f(x) = x^3 + 2$ és f^{-1} függvények kapcsolatának felírása: 3 pont; csak egy gyök létezik 3 pont; ez -3 és -2 közé esik: 3 pont (+1 pont)=10 pont.

2. megoldás: Vezessük be az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^3+2)/5$ függvényt. Az x^3 függvény szigorúan monoton növekedő, ezért f is az, tehát injektív. Az $y = (x^3 + 2)/5$ egyenletből x-et kifejezve nyerjük, hogy $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{5y-2}$. (3 pont)

Ebből következően a feladat egyenlete $f(x) = f^{-1}(x)$ alakba írható, ami egyenértékű azzal, hogy $f(f(x)) = x$. (1 pont)

Ennek pontosan azon x_0 számok a megoldásai, amelyekre $f(x_0) = x_0$. Ha ugyanis $f(x_0) < < x_0$ lenne, akkor f szigorú monoton növekedése folytán $f(f(x_0)) = x_0 < f(x_0)$, ami ellentmondás. Hasonlóan nem lehetséges $f(x_0) > x_0$ sem.

Az eredeti egyenletnek tehát pontosan olyan x megoldásai lehetnek, amelyekre $(x^3+2)/5 = = x$. (2 pont)

Innen az előző részhez hasonlóan fejezhetjük be a megoldást. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés. Lényeges, hogy f szigorúan monoton *növekedő*, mert csökkenő esetben általában nem igaz, hogy az $f(x) = f^{-1}(x)$ egyenletnek csak olyan megoldásai lennének, amelyekre $f(x) = x$.

Támogatóink

A 25. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny szakmai fővédnöke

Lovász László, a Magyar Tudományos Akadémia Elnöke

A 25. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny támogatói

Miniszterelnöki Hivatal

Nemzetpolitikai Államtitkárság

Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Magyar Tudományos Akadémia

OTP Fáy András Alapítvány

Centrál Médiacsoport Zrt.

Matematika Birodalma Alapítvány

BKK (Budapesti Közlekedési Központ)

Budapest Főváros Önkormányzat

Budapest Főváros VIII. kerület Józsefvárosi Önkormányzat

Budapest Főváros XIII. Kerületi Önkormányzat

Rákóczi Szövetség

RaM Colosseum

Képesház

Burger King

SAS Institute Kft.

Breona Informatikai Tanácsadó és Szolgáltató Kft

Typotex Kiadó

SaKOTA

MolControl Kft

KemencePék

KöMaL

Bolyai János Matematikai Társulat

Botár Annamária dr.

Bukváné Vajda Ivette Beatrix

Mohácsi János

Szepesi Zsuzsanna

A Berzsenyi Dániel és a Fazekas Mihály Gimnázium tantestületei

Szülők és tanulók, akik pénzadományokkal és természetbeni hozzájárulással segítettek

Tartalomjegyzék